Fonction exponentielle

24 mars 2022

Tous les théorèmes des deux premières parties sont démontrés en annexe.

1 Définition

Théorème 1

Il existe une fonction f qui vérifient les propriétés suivantes :
- f est dérivable sur $\mathbf{R}$
- $f' = f$
- $f(0) = 1$

Ceci est très difficile à notre niveau. C'est donc admis.

Théorème 2

Toute fonction f vérifiant les propriétés ci-dessous vérifie

$$\forall x \in \mathbf{R},\ f(x)f(-x) = 1.$$

Théorème 3

Une seule fonction vérifie les propriétés du théorème 1. On appelle cette fonction **l'exponentielle**.

On la note exp pour le moment. La grammaire est ici importante : utiliser un article défini, c'est sous-entendre l'unicité de cette fonction.

2 Propriétés algébriques

Théorème 4 (Conséquences importantes de 2)

1. $\forall x \in \mathbf{R},\ \exp(x) \neq 0$
2. $\forall x \in \mathbf{R},\ \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$

Théorème 5

La fonction exponentielle vérifie pour tout $x,y \in \mathbf{R}$

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$$
$$\exp(x-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$$

On peut donc dire que la fonction exp « transforme les sommes en produits ».

Ce comportement devrait vous rappeler celui des puissances : $\forall a \in \mathbf{R}$, $\forall n,m \in \mathbf{Z}$, $a^{n+m} = a^n a^m$. C'est indicatif d'un lien entre les deux notions qui sera développé en Terminale. Et qui justifie la notation suivante.

Définition 1 (Notation puissance)

Pour tout $x \in \mathbf{R}$, on note e^x le réel $\exp(x)$, où e est le nombre $\exp(1)$.

Remarque $e \approx 2{,}71828$.

3 Propriétés analytiques

Étudions maintenant $x \mapsto e^x$ comme n'importe quelle fonction.

3.1 Signe

Comme dit plus haut, $\forall x \in \mathbf{R}$, $e^x \neq 0$. Comme $e^0 = 1 > 0$, la fonction exponentielle ne change donc pas de signe [1], et on peut alors dire

Théorème 6

La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbf{R}$: $\forall x \in \mathbf{R}$, $e^x > 0$.

Son tableau de signe est donc

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
e^x	$+$

3.2 Variations

Comme $\exp' = \exp$ et qu'on connaît le signe de exp on peut alors dire

Théorème 7

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbf{R}$.

1. L'argument sera rendu rigoureux en Terminale. L'idée est que la courbe de l'exponentielle est « lisse » et « en un seul morceau ».

Ce théorème a pour conséquences les faits suivants

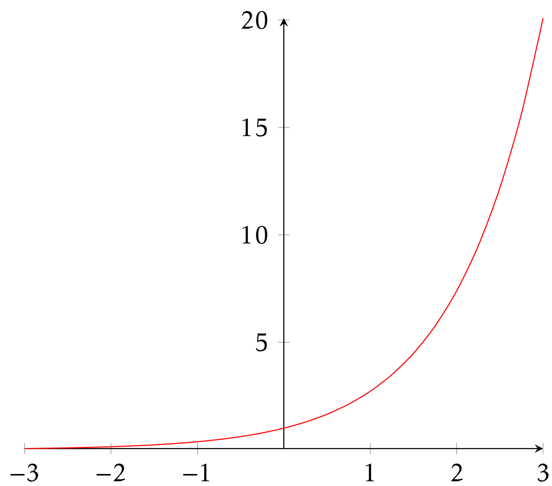
Théorème 8

Soit $a,b \in \mathbf{R}$.

— $e^a = e^b \iff a = b$
— $e^a \geq e^b \iff a \geq b$
— $e^a > e^b \iff a > b$

Remarque Ceci sert surtout à résoudre équations et inéquations.

3.3 Représentation graphique



La courbe ci-dessus laisse voir la « rapidité » de la croissance de l'exponentielle.

Mais toute croissance « rapide » ne relève pas forcément d'une exponentielle. Ce qui est important, c'est le mécanisme sous-jacent : la fonction est proportionnelle à sa propre dérivée.

4 Qu'est-ce qu'une croissance « exponentielle » ?

On peut entendre dans le langage courant parler d'une grandeur qui croît « exponentiellement ». Qu'entends-t-on exactement par là ?

Si la quantité à laquelle on s'intéresse est discrète, c'est-à-dire que c'est une suite, alors dire qu'elle croît (ou décroît) de manière « exponentielle » veut simplement dire que la suite est géométrique.

Si la quantité est continue, c'est-à-dire que c'est une fonction alors on veut dire par là que la dérivée est proportionnelle à la fonction elle-même :

$$f' = \alpha f$$

où α est une constante de proportionnalité. Dans ce cas, on peut montrer que

$$f(t) = f(0)e^{\alpha t}.$$

Après une unité de temps, f est multipliée par $\frac{f(t+1)}{f(t)} = e^{\alpha}$. Et ce quel que soit le point de départ t. En physique il est souvent utile, si un phénomène suit une telle loi, de prendre le problème à l'envers. C'est-à-dire de trouver le temps τ tels que f soit divisé par deux :

$$\frac{f(t+\tau)}{f(t)} = \frac{1}{2}.$$

Exemples de phénomènes exponentiels

discrets
- reproduction de bactéries
- reproduction épidémique

continus
- décroissance radioactive
- volume de mousse dans un verre à bière

5 Fonctions exponentielles

Définition 2

On dit qu'une fonction f est une **exponentielle** si elle vérifie

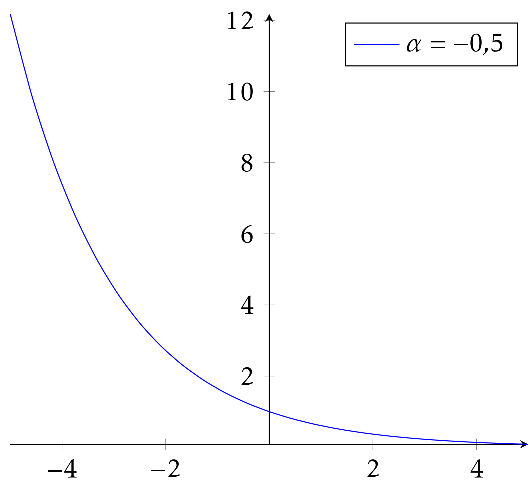
$$\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) = e^{\alpha x}$$

où α est une certaine constante.

Le changement principal de comportement qui nous intéresse dépend de α.

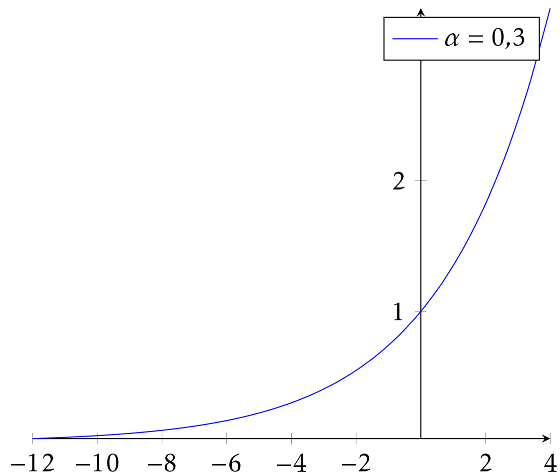
5.1 $\alpha < 0$

La fonction décroît sur $\mathbf{R}$:



5.2 $\alpha > 0$

La fonction décroît sur $\mathbf{R}$:



$\alpha = 0{,}3$
2
1
−12
−10
−8
−6
−4
−2
2
4

6 Annexe

Démonstration (du théorème 2)

Notons h la fonction $x \mapsto f(x)f(-x)$. h est un produit de fonctions dérivables sur $\mathbf{R}$, elle l'est donc aussi.

Soit $x \in \mathbf{R}$, on a alors

$$\begin{aligned} h'(x) &= f'(x)f(-x) + f(x)(-f'(-x)) \\ &= f(x)f(-x) - f(x)f(-x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

h' vaut zéro partout, h est donc constante sur $\mathbf{R}$. En particulier, $\forall x \in \mathbf{R}$, $h(x) = h(0)$. Or $h(0) = f(0)^2 = 1^2 = 1$. Donc

$$\forall x \in \mathbf{R},\ f(x)f(-x) = 1.$$

Démonstration (du théorème 3)

Soit donc f, g deux fonctions répondant au problème. La démonstration du théorème 2 n'utilise pas l'unicité. On peut donc la réutiliser pour obtenir que g ne s'annule jamais.

La fonction $h = \frac{f}{g}$ est donc bien définie et dérivable sur $\mathbf{R}$.

$$\begin{aligned} h' &= \frac{f'g - fg'}{g^2} \\ &= \frac{fg - fg}{g^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

La fonction h est donc constante sur $\mathbf{R}$. En particulier $\forall x \in \mathbf{R}$, $h(x) = h(0)$. Or $h(0) = \frac{f(0)}{g(0)} = \frac{1}{1} = 1$. Donc

$$\forall x \in \mathbf{R},\ \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

C'est-à-dire

$$\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) = g(x).$$

Ce qui montre qu'il n'y a qu'une seule fonction vérifiant les contraintes du théorème.

Démonstration (du théorème 5)

Soit $y \in \mathbf{R}$ fixé. On appelle h la fonction $x \mapsto \frac{\exp(x+y)}{\exp(x)}$.

Cette fonction est définie sur tout $\mathbf{R}$ car, grâce au théorème 2, le dénominateur ne s'annule jamais.

h est aussi dérivable sur $\mathbf{R}$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbf{R}$. Soit $x \in \mathbf{R}$, on a alors

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{1 \times \exp'(x+y)\exp(x) - \exp(x+y)\exp'(x)}{\exp(x)^2} \\ &= \frac{\exp(x+y)\exp(x) - \exp(x+y)\exp(x)}{\exp(x)^2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

h est donc constante sur $\mathbf{R}$. En particulier $\forall x \in \mathbf{R}$, $h(x) = h(0)$. Donc

$$\forall x \in \mathbf{R},\ h(x) = \frac{\exp(0+y)}{\exp(0)} = \frac{\exp(y)}{1} = \exp(y).$$

On vient donc de montrer que

$$\forall x, y \in \mathbf{R},\ \exp(x+y) = \exp(x)\exp(y).$$