Polynômes du second degré

3 septembre 2023

Table des matières

1 Introduction

Définition 1

On appelle **polynôme du second degré** toute fonction f telle qu'il existe $a, b, c \in \mathbf{R}$ de sorte que

$$\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) = ax^2 + bx + c.$$

où $a \neq 0$.

Ces trois nombres sont appelés les **coefficients** de f.

On admet que a, b, c sont uniques. C'est-à-dire qu'on a

Théorème 1 (Identification des coefficients)

Si $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$
- sont des polynômes du second degré,
- égales en tout $x \in \mathbf{R}$,

alors les coefficients de f et g sont égaux.

2 Forme canonique et variations

Étant donné un polynôme du second degré, plusieurs questions se posent :
- Quelles sont ses variations ?
- Existence d'extrema ?

La dite « forme canonique » permet de répondre à ces questions.

Théorème 2 (Forme canonique)

Soit $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ un polynôme. Alors, il existe deux nombres uniques α et β tels que

$$\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta.$$

Remarque On retrouve bien a dans la nouvelle écriture.

Vocabulaire C'est cette nouvelle forme de f que l'on appelle sa **forme canonique**.

Démonstration

$$\begin{aligned} a(x-\alpha)^2+\beta &= a(x^2-2\alpha x+\alpha^2)+\beta \\ &= ax^2-2a\alpha x+a\alpha^2+\beta \end{aligned}$$

Par unicité des coefficients, on a donc :

$$\begin{aligned} a &= a \\ -2a\alpha &= b \\ a\alpha^2+\beta &= c \end{aligned}$$

Ce qui se résout en

$$\alpha = -\frac{b}{2a}$$
$$\beta = c - a\alpha^2 = c - a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 = c - \frac{ab^2}{4a^2} = c - \frac{b^2}{4a}$$

On a donc montré que si α et β existent alors ils sont uniques. En effet, si a, b, c sont fixés, alors α et β sont déterminés par les formules trouvées ci-dessus. Pour montrer qu'ils existent, il suffit de vérifier que, avec ces formules, développer l'expression $a(x-\alpha)^2+\beta$ redonnent bien celle de f.

Exemples Complétez

1. La forme canonique de x^2+2x+1 est ...
2. La forme canonique de $4x^2+4x+3$ est ...

2.1 Interprétation géométrique

Interprétons géométriquement α et β. Déjà, on peut remarquer que

$$f(\alpha) = a(\alpha-\alpha)^2+\beta = \beta.$$

Donc $(\alpha;\beta)$ est un point sur la courbe qui représente f. De plus comme $a(x-\alpha)^2$ est de signe constant [1] quelle que soit la valeur de x, toute la courbe de f est au-dessus/au-dessous de ce point.

On l'appelle donc le **sommet**. α est donc l'abscisse du sommet, et β la distance de l'axe des abscisses au sommet.

De plus on a la propriété (admise) suivante :

Théorème 3

La parabole représentant f est symétrique par rapport à la droite vertical d'équation $x = \alpha$.

1. Celui de a

Remarque Le sommet est sur cette droite.

Démonstration

Il faut donc démontrer que pour tout x,

$$f(a+x) = f(a-x).$$

A finir...

2.2 Extrema

Grâce à la forme canonique, on peut maintenant trouver l'extremum d'une parabole.

Théorème 4

Un polynôme du second degré admet un extremum sur $\mathbf{R}$. Plus précisément

- Si $a > 0$, f admet un minimum atteint uniquement en $x = \alpha$, qui vaut β.
- Si $a < 0$, f admet un maximum atteint uniquement en $x = \alpha$, qui vaut β.

Remarque L'extremum est toujours β, atteint en $x = \alpha$. Seule sa nature change en fonction du signe de a

Démonstration

Je ne démontre que le cas où $a > 0$, pour ne pas trop me répéter.
Un carré est toujours positif, donc comme $a > 0$

$$\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) = \underbrace{a(x-\alpha)^2}_{\geq 0} + \beta \geq \beta$$

Comme de plus on sait que $\beta = f(\alpha)$, β est donc le minimum de f, atteint en $x = \alpha$.
Montrons que c'est bien la seule valeur de x qui donne β :

$$\begin{aligned} f(x) = \beta &\iff a(x-\alpha)^2 = 0 \\ &\iff (x-\alpha)^2 = 0 \\ &\iff x = \alpha \end{aligned}$$

2.3 Variations

Théorème 5

Soit f un polynôme du second degré de forme canonique $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$. Alors
- Si $a > 0$, f est strictement décroissante sur $]-\infty;\alpha]$ et strictement croissante sur $[\alpha;+\infty[$
- Si $a < 0$, f est strictement croissante sur $]-\infty;\alpha]$ et strictement décroissante sur $[\alpha;+\infty[$

Démonstration

Je ne démontre ici que l'affirmation suivante : « Si $a > 0$, f est strictement décroissante sur $]-\infty;\alpha]$». L'argument s'adapte facilement ensuite. On veut montrer

$$\forall u, v \leq \alpha,\ u < v \Rightarrow f(u) > f(v).$$

Soit donc $u, v \leq \alpha$ tels que $u < v$. On veut montrer que $f(v) < f(u)$. Pour comparer ces deux nombres, on étudie le signe de leur différence. Etudier le signe d'une expression est facile si cette expression a la forme d'un produit. On va donc factoriser $f(v) - f(u)$:

$$\begin{aligned} f(v) - f(u) &= a(v-\alpha)^2 + \beta - a(u-\alpha)^2 - \beta \\ &= a\left((v-\alpha)^2 - (u-\alpha)^2\right) \\ &= a(v-\alpha-u+\alpha)(v-\alpha+u-\alpha) \\ &= a(v-u)(v+u-2\alpha) \end{aligned}$$

Pour appliquer la règle du produit, il faut déterminer le signe de ces trois termes :
- par hypothèse $v - u > 0$,
- par hypothèse $a > 0$,
- ensuite, comme $u < v$ la moyenne m de u, v vérifie $u < m < v \leq \alpha$. Et donc $m < \alpha$. Ou encore $\frac{u+v}{2} < \alpha$. Ce qui donne $u + v - 2\alpha < 0$.

et donc $f(v) - f(u) < 0$.

3 Résoudre une équation quadratique

Soit f un polynôme du second degré donné. On cherche à résoudre $f(x) = 0$. Les questions suivantes se posent alors :
- Cette équation a-t-elle des solutions ?
- Si oui, combien et peut-on les trouver ?

3.1 Existence de solutions

Ecrivons f sous forme canonique :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta.$$

L'équation

$$f(x) = 0$$

est alors équivalente à

$$a\left((x-\alpha)^2 + \frac{\beta}{a}\right) = 0,$$

c'est-à-dire

$$(x-\alpha)^2 + \frac{\beta}{a} = 0.$$

Car $a \neq 0$. On a donc a ramené le problème de départ à l'étude d'un autre polynôme : $x \mapsto (x-\alpha)^2 + \frac{\beta}{a}$. Notons-le g. Comme le coefficient dominant est 1, le tableau de variation est le suivant :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$\searrow$	$\frac{\beta}{a}$	$\nearrow$	

Il y a alors 3 cas possibles (faire les dessins correspondants) :
- Si $\frac{\beta}{a} > 0$, il n'y a aucune solution.
- Si $\frac{\beta}{a} = 0$, il y a une unique solution (qui vaut α).
- Si $\frac{\beta}{a} < 0$, il y a deux solutions (une avant α, une après).

On peut simplifier le critère en remarquant que

$$\begin{aligned}
\frac{\beta}{a} &= \frac{1}{a}\left(-\frac{b^2}{4a} + c\right) \\
&= \frac{1}{a}\left(-\frac{b^2-4ac}{4a}\right) \\
&= -\frac{b^2-4ac}{4a^2} \\
&= \underbrace{\left(-\frac{1}{4a^2}\right)}_{\leq 0}(b^2-4ac)
\end{aligned}$$

$\frac{\beta}{a}$ est donc du signe opposé de $b^2 - 4ac$.

Définition 2

Soit $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ un polynôme.
On note Δ le nombre $b^2 - 4ac$. On l'appelle le **discriminant** du polynôme f.

On peut maintenant dire :

Théorème 6

Soit $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ un polynôme, et Δ son discriminant. On cherche le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ dans $\mathbf{R}$.
- Si $\Delta < 0$, il n'y a aucune solution.
- Si $\Delta = 0$, il y a une unique solution.
- Si $\Delta > 0$, il y a deux solutions.

3.2 Expression des solutions et factorisation

On se place ici dans le cas où $\Delta \geq 0$. On sait alors qu'il existe des solutions et on cherche à les exprimer en fonction uniquement de a, b, c.

Cas $\Delta = 0$ Comme $\Delta = -4a\beta$, on sait alors que $\beta = 0$. Donc que

$$\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) = a(x - \alpha)^2.$$

La seule solution de $f(x) = 0$ est donc α qui s'écrit aussi :

$$\alpha = -\frac{b}{2a}.$$

Cas $\Delta > 0$ Rappelons-nous que $f(x) = 0$ est équivalent à $(x - \alpha)^2 + \frac{\beta}{a} = 0$ et que $\frac{\beta}{a} = -\frac{\Delta}{4a^2}$. On cherche donc les solutions de

$$(x - \alpha)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0.$$

Or

$$\begin{aligned}
(x-\alpha)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} &= (x-\alpha)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2 \\
&= \left(x - \alpha - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right)\left(x - \alpha + \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right) \\
&= \left(x - \left(\alpha + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right)\left(x - \left(\alpha - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right) \\
&= (x - x_+)(x - x_-)
\end{aligned}$$

si on note $x_+ = \alpha + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_- = \alpha - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$.

On peut donc conclure avec le théorème suivant

Théorème 7

	Solution(s)	Factorisation
$\Delta = 0$	$\frac{-b}{2a}$	$a(x-\alpha)^2$
$\Delta > 0$	$x_\pm = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$	$a(x-x_+)(x-x_-)$

Remarque Les solutions $x_\pm$ sont symétriques par rapport à la droite verticale d'équation $x = \alpha$ qui est l'axe de symétrie de la parabole.

3.3 Racines

Définition 3

Soit f un polynôme du second degré. On appelle **racine** de f tout nombre $x \in \mathbf{R}$ vérifiant $f(x) = 0$.

Tout ce que nous avons fait dans les sections 3.1 et 3.2 permet de trouver systématiquement les racines d'un polynôme, quand il y en a.

Inversement, si on connaît un polynôme sous forme factorisée, on peut en déduire facilement ses racines.

3.4 Relations coefficients-racines

De la factorisation précédente on tire le théorème suivant.

Théorème 8 (Relations coefficients-racines)

Si f a des racines $x_\pm$, alors

$$x_+ x_- = \frac{c}{a}$$
$$x_+ + x_- = -\frac{b}{a}$$

Ceci permet principalement de trouver facilement la deuxième racine, si on en connaît une.

Démonstration

On le fait par calcul direct. On sait que

$$x_+ = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a},$$
$$x_- = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Donc

$$\begin{aligned} x_+ + x_- &= \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-b+\sqrt{\Delta}-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-2b}{2a} \\ &= -\frac{b}{a}. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} x_+x_- &= \left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \\ &= \frac{\left(-b+\sqrt{\Delta}\right)\left(-b-\sqrt{\Delta}\right)}{4a^2} \\ &= \frac{(-b)^2-\left(\sqrt{\Delta}\right)^2}{4a^2} \\ &= \frac{b^2-\Delta}{4a^2} \quad (\text{car } \Delta > 0) \\ &= \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2} \\ &= \frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} \\ &= \frac{c}{a} \end{aligned}$$

Ce qui conclue la démonstration.