

1. Raisonnement par récurrence

1. Propriété mathématique

Définition

Une **propriété mathématique** est une phrase, écrite ou non avec des symboles mathématiques, qui contient un verbe et qui est soit vraie soit fausse.

Remarque

Lorsque la propriété concerne un entier naturel n , on peut la noter $P(n)$.

Cette propriété peut être :

- une égalité, par exemple $P(n) : 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$;
- une inégalité, par exemple $P(n) : (1 + \pi)^n \geq 1 + n\pi$;
- une phrase, par exemple $P(n) : n^3 - n$ est un multiple de 3.

2. Principe de récurrence

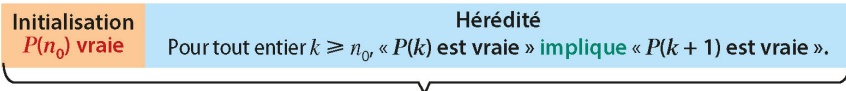
Principe de récurrence (axiome)

$P(n)$ désigne une propriété concernant un entier naturel n et n_0 désigne un entier naturel.

Si l'on démontre les deux étapes suivantes :

- étape 1 (**initialisation**) : $P(n)$ est vraie pour un entier n_0 ;
 - étape 2 (**hérédité**) : pour tout entier $k \geq n_0$, « $P(k)$ est vraie » implique « $P(k+1)$ est vraie » ;
- alors on peut conclure que $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

Le schéma suivant illustre le principe de récurrence.



Conclusion : $P(n_0)$ vraie $\Rightarrow P(n_0 + 1)$ vraie $\Rightarrow P(n_0 + 2)$ vraie $\Rightarrow \dots \Rightarrow P(n)$ vraie

3. Raisonnement par récurrence

$P(n)$ désigne une propriété concernant un entier naturel n et n_0 désigne un entier naturel.

Pour démontrer que $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$, on procède ainsi.

- **Initialisation** : on vérifie que $P(n_0)$ est vraie (c'est-à-dire que la propriété est vraie au rang n_0).
- **Hérédité** : on démontre, pour tout entier k supérieur ou égal à n_0 , l'implication :

$$P(k) \text{ vraie} \Rightarrow P(k+1) \text{ vraie.}$$

Pour cela, on considère un entier quelconque k , avec $k \geq n_0$, et on suppose que $P(k)$ est vraie (c'est-à-dire que l'on suppose que la propriété est vraie au rang k). C'est l'**hypothèse de récurrence**.

On démontre alors que $P(k+1)$ est vraie (c'est-à-dire que la propriété est vraie au rang $k+1$) en utilisant l'hypothèse de récurrence.

- **Conclusion** : on conclut, d'après le principe de récurrence, que $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

Remarque

L'initialisation se fait souvent pour $n_0 = 0$ ou $n_0 = 1$. On vérifie donc que $P(0)$ ou $P(1)$ est vraie.