1. Raisonnement par récurrence

1. Propriété mathématique

Définition

Une **propriété mathématique** est une phrase, écrite ou non avec des symboles mathématiques, qui contient un verbe et qui est soit vraie soit fausse.

Remarque

Lorsque la propriété concerne un entier naturel n, on peut la noter $P(n)$.
Cette propriété peut être :
- une égalité, par exemple $P(n) : 1+2+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$;
- une inégalité, par exemple $P(n) : (1+\pi)^n \geqslant 1+n\pi$;
- une phrase, par exemple $P(n) : n^3-n$ est un multiple de 3.

2. Principe de récurrence

Principe de récurrence (axiome)

$P(n)$ désigne une propriété concernant un entier naturel n et n_0 désigne un entier naturel.
Si l'on démontre les deux étapes suivantes :
- étape 1 (**initialisation**) : $P(n)$ est vraie pour un entier n_0 ;
- étape 2 (**hérédité**) : pour tout entier $k \geqslant n_0$, « $P(k)$ est vraie » implique « $P(k+1)$ est vraie » ;

alors on peut conclure que $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$.

Le schéma suivant illustre le principe de récurrence.

Initialisation	Hérédité
$P(n_0)$ vraie	Pour tout entier $k \geqslant n_0$, « $P(k)$ **est vraie** » **implique** « $P(k+1)$ **est vraie** ».

Conclusion : $P(n_0)$ **vraie** $\Rightarrow$ $P(n_0+1)$ **vraie** $\Rightarrow$ $P(n_0+2)$ **vraie** $\Rightarrow \ldots \Rightarrow$ $P(n)$ **vraie**

3. Raisonnement par récurrence

$P(n)$ désigne une propriété concernant un entier naturel n et n_0 désigne un entier naturel.

Pour démontrer que $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$, on procède ainsi.
- **Initialisation** : on vérifie que $P(n_0)$ est vraie (c'est-à-dire que la propriété est vraie au rang n_0).
- **Hérédité** : on démontre, pour tout entier k supérieur ou égal à n_0, l'implication :

$$P(k) \text{ vraie} \Rightarrow P(k+1) \text{ vraie.}$$

Pour cela, on considère un entier quelconque k, avec $k \geqslant n_0$, et on suppose que $P(k)$ est vraie (c'est-à-dire que l'on suppose que la propriété est vraie au rang k). C'est **l'hypothèse de récurrence**.
On démontre alors que $P(k+1)$ est vraie (c'est-à-dire que la propriété est vraie au rang $k+1$) en utilisant l'hypothèse de récurrence.
- **Conclusion** : on conclut, d'après le principe de récurrence, que $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$.

Remarque

L'initialisation se fait souvent pour $n_0=0$ ou $n_0=1$. On vérifie donc que $P(0)$ ou $P(1)$ est vraie.