I Epreuves à deux issues et répétitions

I.1 Epreuve de Bernoulli

Une épreuve de Bernoulli est définie par deux issues aléatoires :
— un « succès »,
— un « échec ».

Exemple Si on s'intéresse au lancer d'une pièce, on peut modéliser une telle situation par une épreuve de Bernoulli dont le succès est la face qui nous intéresse. La probabilité du succès dépendra de l'équilibrage de la pièce.

Définition 1

Soit une variable aléatoire X qui prend les valeurs suivantes :
- 1 pour le succès,
- 0 pour l'échec.

La probabilité de succès est souvent notée p, c'est par définition $\mathbf{P}(X = 1)$.
On dit alors que X suit une **loi de Bernoulli** de paramètre p, ce qu'on note $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(p)$.

Exemple La v.a.[1] X qui modélise le lancer d'une pièce équilibrée vérifie $X \rightsquigarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$.

I.2 Schéma de Bernoulli

Définition 2

Un **schéma de Bernoulli** est la répétition d'un nombre fixé d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

Exemples
- Lancer 3 fois la même pièce.
- Tirer (avec remise) 5 élèves au hasard dans un lycée et leur demander s'ils sont en Terminale.

1. abréviation de « variable aléatoire ».

Définition 3

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Soit X une v.a. qui compte le nombre de succès dans la répétition de n épreuves de Bernoulli qui sont

- identiques, c'est-à-dire qu'elles ont toutes la même probabilité de succès p,
- indépendantes.

On dit alors que X suit une **loi binomiale** de paramètres n, p. On le note $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(n;p)$.

Définition 4

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $k \in \{0,1,\ldots,n\}$.
On note $\binom{n}{k}$ et on lit « k parmi n » le nombre de branches contenant k succès dans un arbre de probabilité représentant un schéma de Bernoulli à n épreuves.

La calculatrice en donne les valeurs. On peut aussi utiliser la règle illustrée sur le schéma suivant :

n \ k	0	1	2	3	4	5	$\cdots$
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$

Théorème 1

Soit $n \in \mathbf{N}^*$, $p \in [0;1]$ et $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(n;p)$.
Pour tout $k \in \{0,\ldots,n\}$ on a

$$\mathbf{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

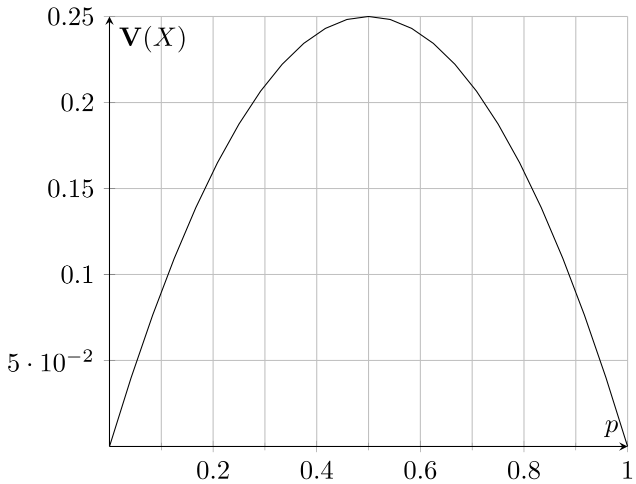
Utilisation de la calculatrice voir p.465 et suivantes en fonction du modèle.

Théorème 2

Soit $n \in \mathbf{N}^*$, $p \in [0;1]$ et $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(n;p)$.
Alors
- $\mathbf{E}(X) = np$
- $\mathbf{V}(X) = np(1-p)$

Remarques
- $\mathbf{E}(X)$ est une fonction croissante de n et de p. Ce qui est conforme à l'intuition.
- $\mathbf{V}(X)$ vu en tant que fonction de p est un polynôme de degré 2. Ses racines sont 0 et 1, son coefficient dominant est négatif. D'où l'allure générale suivante.

la valeur de n ne change que la valeur du max.



Autrement dit, plus p est proche de 0,5, plus la loi binomiale « s'étale ».