Exercice 1

On s'intéresse au signe des six fonctions suivantes :

$f_1(x) = x^2 + 1 + e^x$	$f_2(x) = (x-3)e^x$
$f_3(x) = 4e^x - 4$	$f_4(x) = (1-x)e^x + 2xe^x$
$f_5(x) = (2x^2 - 3x + 1)e^x$	$f_6(x) = (x^2+1)e^x$

1. Deux de ces fonctions ont un signe évident sur $\mathbb{R}$. Lesquelles et pourquoi ?

2. Deux autres fonctions sont le produit de e^x par une fonction dont on peut connaître le signe. Lesquelles ? Étudier le signe de ces deux fonctions.

3. Factoriser les deux dernières fonctions et établir leur signe.

Exercice 2

Étudier le sens de variation des fonctions suivantes.

1. $f_1(x) = x + e^x$ sur $\mathbb{R}$	**2.** $f_2(x) = \dfrac{1}{e^x - 1}$ sur $\mathbb{R}^*$
3. $f_3(x) = e^x - x + 3$ sur $\mathbb{R}$	**4.** $f_4(x) = 2x^2e^x$ sur $\mathbb{R}$

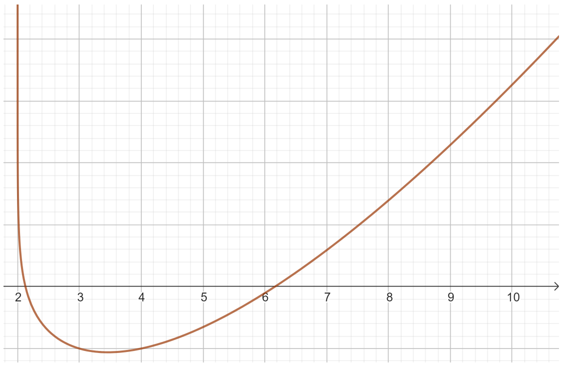
Exercice 3

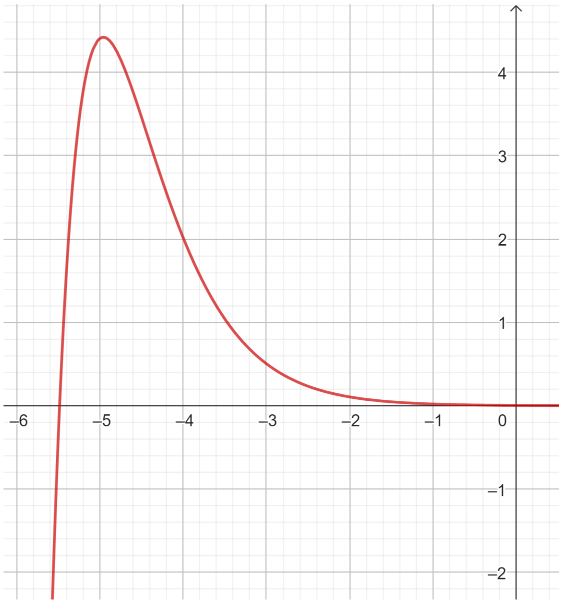
Étudier le sens de variation des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$.

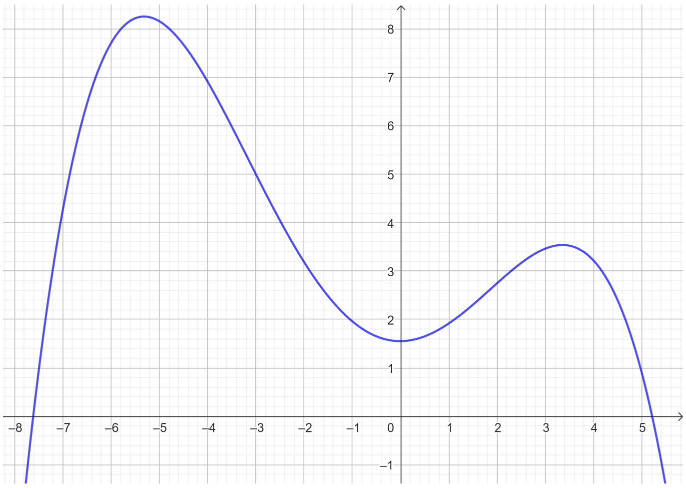
1. $f_1(x) = 4x - 3e^{-2x+3}$	**2.** $f_2(x) = x + e^{-x}$
3. $f_3(x) = xe^{-x}$	**4.** $f_4(x) = (x^2+3)e^{3x}$
5. $f_5(x) = (x-3)e^{2x+1} - 3$	**6.** $f_6(x) = xe^{2x}$
7. $f_7(x) = x^2e^{2x} - 1$	**8.** $f_8(x) = (x^2+x+1))e^{-x}$

Exercice 4

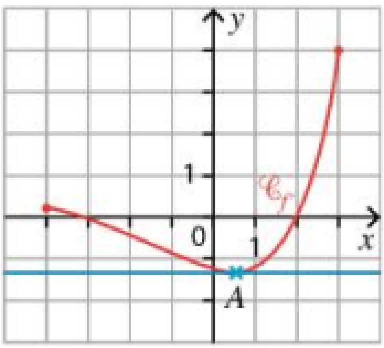
Conjecturer la convexité de chacune des fonctions représentées ci-dessous.







Exercice 5

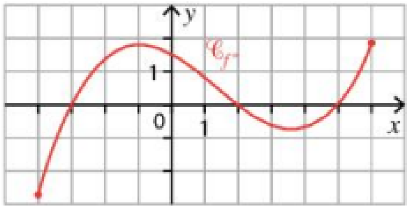


Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[-4\ ;\ 3]$.
La représentation graphique $\mathcal{C}_{f'}$ de sa fonction dérivée f' est donnée ci-contre. Elle admet une tangente horizontale au point $A(0{,}5\ ;\ -1{,}3)$.

1. Déterminer graphiquement le signe de f' et en déduire le sens de variation de f sur $[-4\ ;\ 3]$.

2. Déterminer graphiquement le sens de variation de f' et en déduire la convexité de f sur $[-4\ ;\ 3]$.

Exercice 6



Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur l'intervalle $[-4\ ;\ 6]$. La représentation graphique $\mathcal{C}_{f''}$ de sa dérivée seconde f'' est donnée ci-contre.

1. En justifiant, déterminer, avec la précision permise par le graphique, la convexité de f sur $[-4\ ;\ 6]$.

2. Sachant que $f(-3) = 2$, $f(2) = 4$ et $f(5) = 6$, construire une courbe qui pourrait être celle de f.

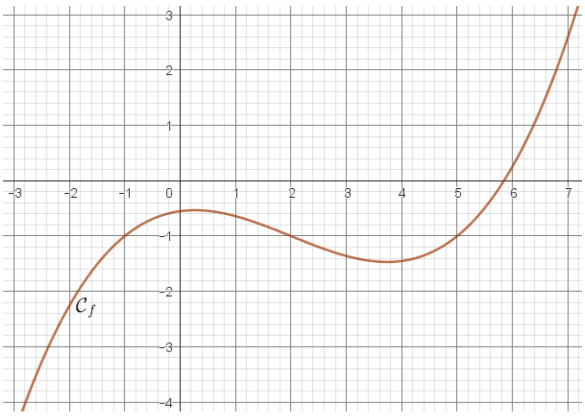
Exercice 7

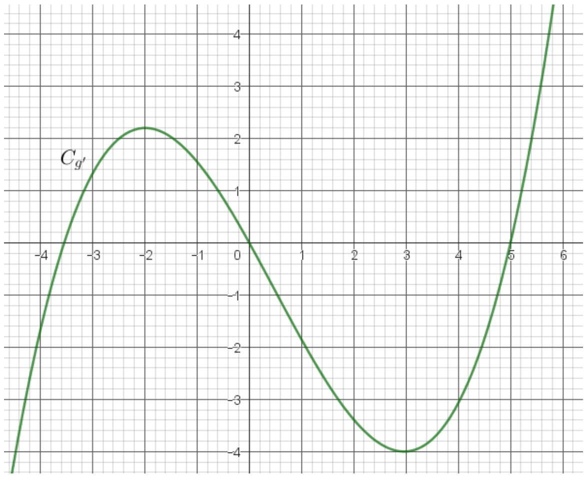
On considère trois fonctions : f définie sur $[-2\ ;\ 6]$, g définie sur $[-4\ ;\ 6]$ et h définie sur $[-7\ ;\ 5]$.
On a représenté ci-dessous les courbes représentatives de f, de g' et de h''.

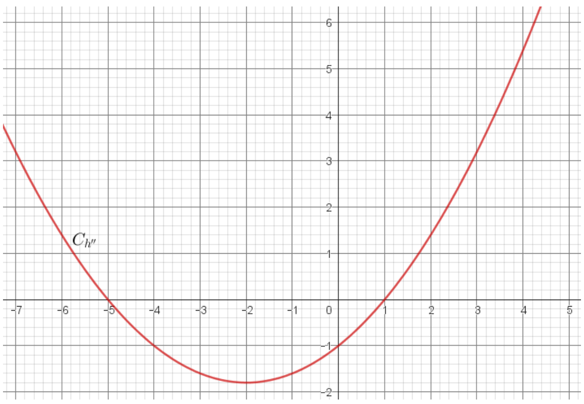
1. Donner les intervalles sur lesquels f est convexe et ceux sur lesquels f est concave.

2. Déterminer les intervalles sur lesquels g est convexe et ceux sur lesquels g est concave.

3. Déterminer les intervalles sur lesquels h est convexe et ceux sur lesquels h est concave.







Exercice 8

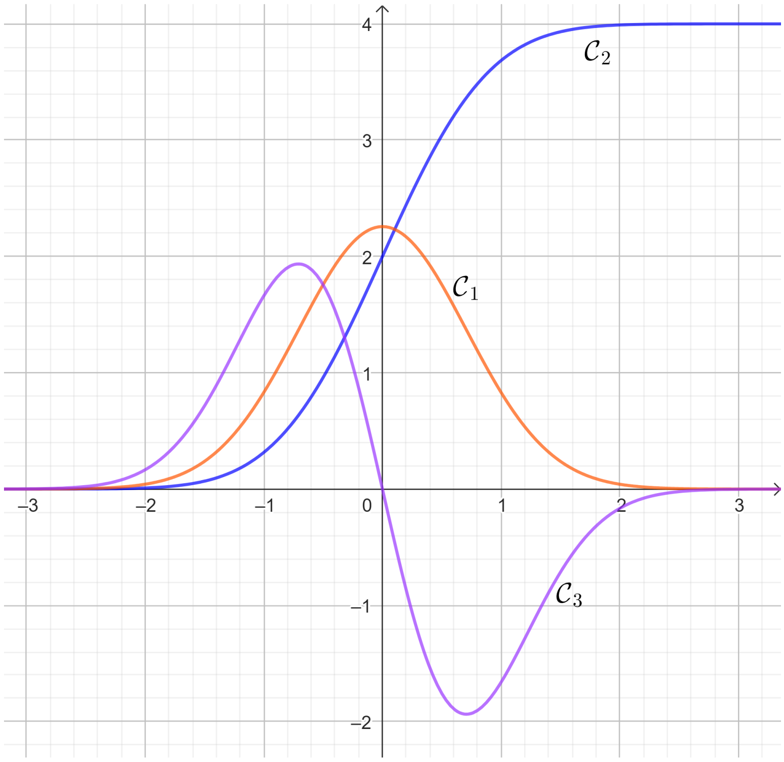
Sur le graphique ci-contre, on a représenté :

— une fonction f ;

— sa dérivée f' ;

— sa dérivée seconde f''.

Associer chaque courbe à sa fonction.



Exercice 9

1. Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de la fonction exponentielle au point d'abscisse 0.

2. Tracer la courbe représentative de la fonction exponentielle ainsi que sa tangente au point d'abscisse 0 sur une calculatrice.

3. Montrer que la fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$.

4. Justifier que, pour tout réel x, $e^x \geq x + 1$.

Exercice 10

Soit f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$.

1. Montrer que f est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.

3. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $x + \dfrac{1}{x} \geqslant 2$.

Exercice 11

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x^2e^x$. On admet que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.

2. Étudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation complet.

3. Étudier la convexité de la fonction f.

4. Préciser les coordonnées des éventuels points d'inflexion de sa courbe représentative.

5. Vérifier en traçant cette courbe sur la calculatrice.

Exercice 12

Soit f la fonction définie sur $[0\,;5]$ par $f(x) = (x^2 + 2x)e^{-x}$.

1. Calculer $f'(x)$ pour $x \in [0\,;5]$.

2. Montrer que pour tout $x \in [0\,;5]$, $f''(x) = (x^2 - 2x - 2)e^{-x}$.

3. Déterminer sur quel intervalle f est concave.

4. Déterminer les coordonnées du point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.

Exercice 13

Étudier la convexité des fonctions suivantes :

1. f_1 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_1(x) = x^3 - 5x^2 + 4x + 3$.

2. f_2 définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f_2(x) = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{x}$.

3. f_3 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_3(x) = (3x - 49)e^{-3x+4}$.

4. f_4 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_4(x) = \dfrac{1}{6}x^4 - \dfrac{1}{3}x^3 + x^2 - 5x + 2$.

5. f_5 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_5(x) = -e^{-x}(x^2 + 7x + 15) + 3x + 1$.

Exercice 14

Soit f la fonction définie sur $[0\,;5]$ par $f(x) = 0{,}125x^3 - 0{,}75x^2 + 4$.

1. **a.** Déterminer l'expression de $f'(x)$.

b. Montrer que $\mathcal{C}_f$, la courbe représentative de f, admet en deux points une tangente horizontale.

c. Déterminer les variations de f sur $[0\,;5]$.

2. **a.** Montrer que $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion I dont on déterminera les coordonnées.

b. Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}$ en ce point.

c. Que peut-on dire de la position relative de $\mathcal{T}$ et de $\mathcal{C}_f$?

Exercice 15

Indiquer, pour chaque proposition, si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

1. La somme de deux fonctions deux fois derivables et convexes est une fonction convexe.

2. Une fonction convexe sur l'intervalle $[1\,;\,3]$ ne peut pas être concave sur $[2\,;\,3]$.

3. Si une fonction change de convexité en a, alors sa courbe représentative admet un point d'inflexion au point d'abscisse a.

Exercice 16

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^x + 1$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.

1. Déterminer la convexité de f.

2. Déterminer l'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.

3. En déduire que, pour tout réel x appartenant à $[-2\,;+\infty\,[$, $f(x) \geq x + 1$.

4. Retrouver le résultat précédent en résolvant algébriquement l'inéquation $f(x) \geq x + 1$.

Pour aller plus loin

Exercice 17

1. On donne les tableaux de variations respectifs de f et de sa dérivée f'.
Tracer une courbe pouvant représenter f.

x	-3		0		4		7
f	8	$\searrow$	1	$\nearrow$	4	$\searrow$	-4

x	-3		2		7
f'	-6	$\nearrow$	1	$\searrow$	-6

2. On donne cette fois-ci les tableaux de variations respectifs de g et de sa **dérivée seconde** g''.
Tracer une courbe pouvant représenter g.

x	-9		-6		0		3
g	2	$\nearrow$	10	$\searrow$	-2	$\nearrow$	10

x	-9		3
g''	-4	$\nearrow$	4

Exercice 18

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On veut démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$.

1. Montrer que l'inégalité est vraie pour $n = 0$ et $n = 1$

2. On suppose dorénavant que $n \geqslant 2$. On pose pour $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) = (1+x)^n$.

- **a.** Montrer que f est convexe sur $\mathbb{R}_+$.
- **b.** Déterminer une équation de la tangente en 0 à la courbe $\mathcal{C}_f$.
- **c.** Conclure.

3. Redémontrer la propriété en utilisant un raisonnement par récurrence.

Exercice 19

Soit $m \in \mathbb{R}$ et f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 + (m-1)x + 3m - 1)e^{-x}$.
Déterminer les valeurs de m pour lesquelles f est convexe sur $\mathbb{R}$.