Exercice 1

1. f_1 et f_6. En effet, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $x^2+1 \geq 1 > 0$ et $e^x > 0$. Or f_1 et f_6 sont respectivement la somme et le produit de ces deux termes strictement positifs. Ces deux fonctions sont donc, elles aussi, strictement positives sur $\mathbf{R}$.

2. f_2 et f_5 sont, respectivement, le produit de e^x par une fonction affine et un polynôme du second degré. Comme l'exponentielle est strictement positive, il suffit d'étudier le signe de ces deux fonctions pour connaître celui de f_2 et f_5.

Prenons $x \mapsto x-3$. Sa pente est positive et elle s'annule en 3. On peut alors dresser le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
Signe de f_2		$-$	0	$+$	

Considérons ensuite $x \mapsto 2x^2-3x+1$. Calculons son discriminant : $(-3)^2-4\times 2\times 1 = 1 > 0$. Ce polynôme a donc deux racines données par

$$\frac{-(-3)+\sqrt{1}}{2\times 2} = 1$$
$$\frac{-(-3)-\sqrt{1}}{2\times 2} = \frac{1}{2}$$

Le coefficient dominant étant de plus positif, on peut donc dresser le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
Signe de f_5		$+$	0	$-$	0	$+$	

3. f_3 se factorise en $f_3(x) = 4(e^x-1)$, ce qui a le signe de e^x-1 (car $4>0$). Or, par stricte croissance de l'exponentielle,

$$e^x-1>0 \iff e^x > e^0 \iff x>0,$$
$$e^x-1=0 \iff e^x = 1 \iff x=0.$$

D'où le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de f_3		$-$	0	$+$	

Il reste f_4, qui se factorise en $f_4(x) = e^x(1-x+2x) = e^x(1+x)$. C'est, comme f_2, le produit d'une fonction affine (de pente positive et s'annulant en -1) et de e^x. Le signe de f_4 est donc celui de la fonction affine, c'est-à-dire

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
Signe de f_4		$-$	0	$+$	

Exercice 2

La méthode est à chaque fois :

— Calcul de la dérivée

— Étude du signe de la dérivée

1. Dérivons f_1 : $\forall x \in \mathbf{R}$, $f_1'(x) = 1 + e^x$. C'est une somme de termes positifs, elle est donc positive sur tout $\mathbf{R}$. f_1 est donc croissante sur $\mathbf{R}$.

2. Dérivons f_2 : $\forall x \neq 0$, $f_2'(x) = \frac{-e^x}{(e^x-1)^2}$. Cette fraction a un numérateur négatif et un dénominateur positif, elle est donc négative. D'où le tableau suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de f'		$-$	‖	$-$	
Variations de f		↘	‖	↘	

3. Dérivons f_3 : $\forall x \in \mathbf{R}$, $f_3'(x) = e^x - 1$. Cf. exercice 1, question 3 pour le signe de cette expression. On obtient le tableau suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de f_3'		$-$	0	$+$	
Variations de f_3		↘	4	↗	

$$f(0) = e^0 - 0 + 3 = 1 - 0 + 3 = 4.$$

4. Dérivons f_4 : $\forall x \in \mathbf{R}$, $f_4'(x) = 2(2x)e^x + 2x^2e^x = e^x(2x^2 + 4x)$. L'exponentielle étant strictement positive sur tout $\mathbf{R}$, le signe de f_4' ne dépend que de celui de $2x^2 + 4x$. Ce polynôme se factorise à l'œil : $2x^2 + 4x = 2x(x + 2)$. Ses racines sont donc 0 et -2. Son coefficient dominant est positif, d'où le tableau suivant :

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
Signe de f_4'		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f_4		↗	$8e^{-2}$	↘	0	↗	

$$f(-2) = 2(-2)^2e^{-2} = 8e^{-2}$$
$$f(0) = 2 \times 0^2 \times e^0 = 0$$

Exercice 3

1. Dérivons f_1 : soit $x \in \mathbf{R}$, on a alors

$$\begin{aligned} f_1'(x) &= 4 - 3(-2e^{-2x+3}) \\ &= 4 + 6e^{-2x+3} \end{aligned}$$

$f_1'(x)$ est une somme de termes positifs. D'où le tableau suivant :

x	$-\infty$		$+\infty$
Signe de f_1'		$+$	
Variations de f_1		$\nearrow$	

2. Dérivons f_2 : soit $x \in \mathbf{R}$, on a alors $f_2'(x) = 1 - e^{-x}$.
$f_2'(x)$ est du signe de x, en effet :

$$\begin{aligned} 1 - e^{-x} > 0 &\iff e^0 > e^{-x} \\ &\iff 0 > -x \\ &\iff 0 < x \end{aligned}$$

D'où le tableau suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de f_2'		$+$	0	$-$	
Variations de f_2		$\nearrow$	1	$\searrow$	

$$f(0) = 0 + e^0 = 1$$

3. Dérivons f_3 : soit $x \in \mathbf{R}$, on a alors

$$\begin{aligned} f_3'(x) &= 1e^{-x} + x(-e^{-x}) \\ &= e^{-x}(1 - x) \end{aligned}$$

$f_3'(x)$ est du signe de $1 - x$ car l'exponentielle est toujours positive. D'où le tableau suivant :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
Signe de f_3'		$+$	0	$-$	
Variations de f_3		$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	

$$f(1) = 1e^{-1} = e^{-1}$$

4. Dérivons f_4 : soit $x \in \mathbf{R}$, on a alors

$$\begin{aligned} f_4'(x) &= 2xe^{3x} + (x^2 + 3)3e^{3x} \\ &= e^{3x}(2x + 3x^2 + 9) \end{aligned}$$

$f_4'(x)$ est du signe de $3x^2 + 2x + 9$, parce que l'exponentielle est toujours positive. Ce polynôme a pour discriminant $2^2 - 4 \times 3 \times 9 = -104 < 0$. Il n'a donc pas de racines. Il est donc partout du signe de son coefficient dominant, qui est 3. D'où le tableau suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
Signe de f_4'	$+$	
Variations de f_4	$\nearrow$	

5. Dérivons f_5 : soit $x \in \mathbf{R}$, on a alors

$$\begin{aligned} f_5'(x) &= 1e^{2x+1} + (x-3)2e^{2x+1} \\ &= e^{2x+1}(1+2x-6) \\ &= e^{2x+1}(2x-5) \end{aligned}$$

$f_5'(x)$ est du signe de $2x-5$, car l'exponentielle est toujours positive. D'où le tableau suivant :

x	$-\infty$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
Signe de f_5'		$-$	0	$+$	
Variations de f_5		$\searrow$	$-\frac{1}{2}e^6 - 3$	$\nearrow$	

6. Dérivons f_6 : soit $x \in \mathbf{R}$, on a alors

$$\begin{aligned} f_6'(x) &= 1e^{2x} + x(2e^{2x}) \\ &= e^{2x}(1+2x) \end{aligned}$$

$f_6'(x)$ est du signe de $1+2x$, parce que l'exponentielle est constamment positive. D'où le tableau suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
Signe de f_6'		$-$	0	$+$	
Variations de f_6		$\searrow$	$-\frac{1}{2}e^{-1}$	$\nearrow$	

7. Dérivons f_7 : soit $x \in \mathbf{R}$, on a alors

$$\begin{aligned} f_7'(x) &= 2xe^{2x} + x^2(2e^{2x}) \\ &= e^{2x}(2x+2x^2) = e^{2x} \times 2x(x+1) \end{aligned}$$

$f_7'(x)$ est du signe de $x(x+1)$, car l'exponentielle est toujours positive. Ce polynôme a pour racines 0 et -1, et son coefficient dominant est positif. D'où le tableau suivant :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
Signe de f_7'		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f_7		$\nearrow$	$e^{-2}-1$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	

8. Dérivons f_8 : soit $x \in \mathbf{R}$, on a alors

$$\begin{aligned} f_8'(x) &= (2x+1)e^{-x} + (x^2+x+1)(-e^{-x}) \\ &= e^{-x}(2x+1-(x^2+x+1)) \\ &= e^{-x}(-x^2+x) = e^{-x} \times x(-x+1) \end{aligned}$$

$f_8'(x)$ est du signe de $x(1-x)$, parce que l'exponentielle est toujours positive. Ce polynôme a pour racines 0 et 1. On trouve le signe de son coefficient dominant en développant :

$$\begin{aligned} x(1-x) &= x - x^2 \\ &= -x^2 + x \end{aligned}$$

Ledit coefficient est donc négatif. D'où le tableau suivant :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
Signe de f_8'		$-$	0	$+$	0	$-$	
Variations de f_8		$\searrow$	1	$\nearrow$	$3e^{-1}$	$\searrow$	

Exercice 4

1. La première fonction semble convexe sur son ensemble de définition.

2. La deuxième fonction semble

— concave sur $]-\infty;-4]$,

— convexe sur $[-4;+\infty[$.

3. La troisième fonction semble

— concave sur $]-\infty;-3]$,

— convexe sur $[-3;1{,}5[$,

— concave après 1,5.

Exercice 5

1. Graphiquement, on peut dresser le tableau suivant :

x	-4		-3		2		3
Signe de f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

2. Graphiquement, on peut dresser le tableau suivant :

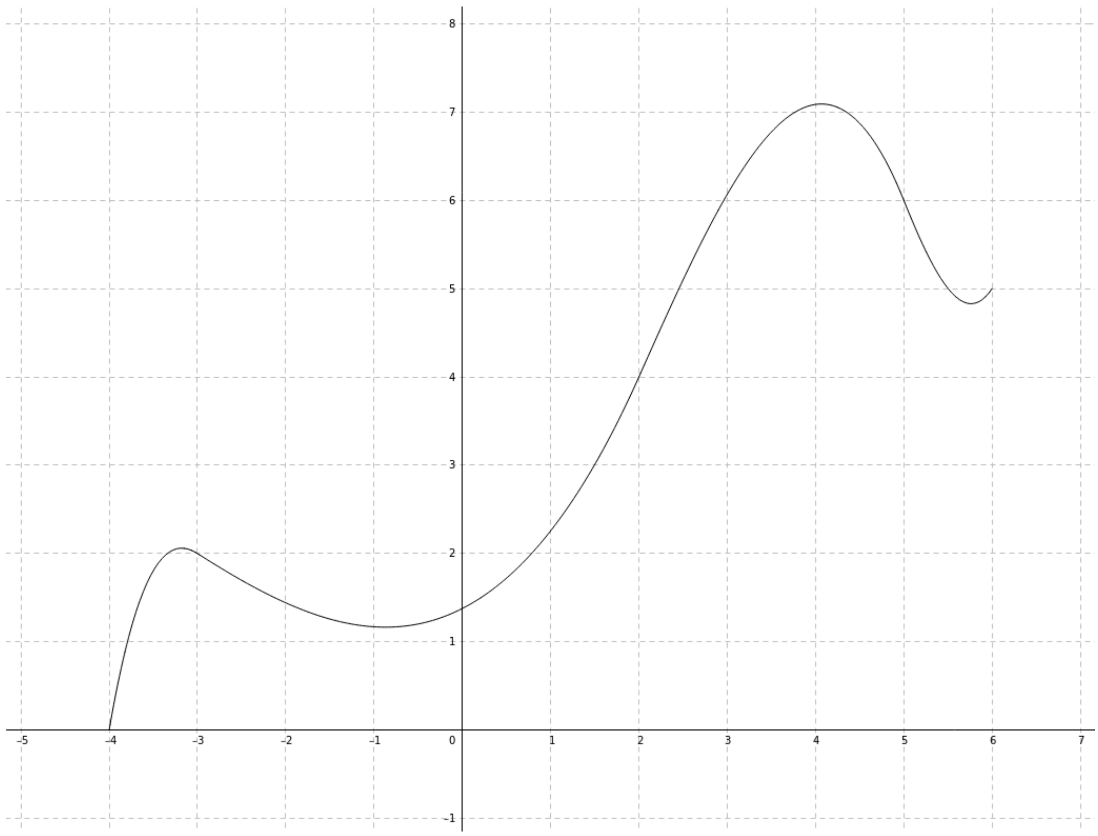
x	-4		$\frac{1}{2}$		3
Signe de f'		$\searrow$		$\nearrow$	
Convexité de f		*concave*		*convexe*	

Exercice 6

1. On sait que le signe de f'' donne la convexité de f. Graphiquement on peut donc dresser le tableau suivant :

x	-4		-3		2		5		6
Signe de f''		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
Convexité de f		*concave*		*convexe*		*concave*		*convexe*	

2. Voici une possibilité



Exercice 7

1. f semble concave sur $[-2; 2]$ et convexe sur $[2; 6]$.

2. On sait que les variations de g' donne la convexité de g. Graphiquement, on peut donc dresser le tableau suivant :

x	-4		-2		3		6
Variations de g'		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
Convexité de g		*convexe*		*concave*		*convexe*	

3. On sait que le signe de h'' donne la convexité de h. Graphiquement, on peut donc dresser le tableau suivant :

x	-7		-5		1		6
Signe de h''		$+$	0	$-$	0	$+$	
Convexité de h		*convexe*		*concave*		*convexe*	

Exercice 8

On note f_1, f_2, f_3 les fonctions représentées par $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$.
Graphiquement on remarque la situation suivante :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de f_3		$+$	0	$-$	
Variation de f_1		$\nearrow$		$\searrow$	

Il semble donc raisonnable de penser que $f_3 = f_1'$.
On remarque de plus que f_1 est positive partout et que f_2 est croissante partout. Il semble donc que $f_1 = f_2'$. Et donc, avec la remarque précédente, que $f_3 = f_2''$. Le signe de f_3 impliquerait que f_2 est convexe puis concave, le point d'inflexion étant en 0. Ce qui se vérifie en effet sur le graphique.
Conclusion : $f = f_2$, $f' = f_1$, $f'' = f_3$.

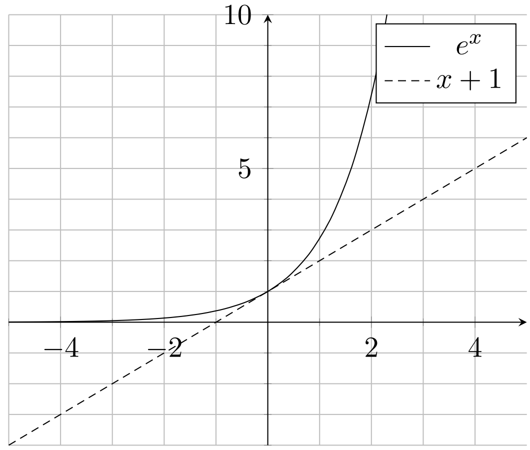
Exercice 9

1. Comme

$$\exp'(0) = \exp(0) = 1,$$
$$\exp(0) = 1,$$

cette tangente a pour équation $y = 1(x - 0) + 1$, ce qui se réécrit $y = x + 1$.

2. Vous devriez obtenir quelque chose comme ça :



3. L'exponentielle est sa propre dérivée. Donc elle est aussi sa propre dérivée seconde : $\exp'' = (\exp')' = \exp' = \exp$. Comme elle positive sur $\mathbf{R}$, elle y est donc aussi convexe.

4. Cette inégalité traduit juste le fait que la fonction exponentielle étant convexe sur $\mathbf{R}$ elle est donc toujours au-dessus de ses tangentes, donc en particulier au-dessus de sa tangente en 0.

Exercice 10

1. Dérivons f deux fois : soit $x > 0$, on a alors

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$$
$$f''(x) = -\frac{-2x}{x^4} = \frac{2}{x^3}$$

Par la règle des signes, x^3 est du signe de x, f'' est donc aussi du signe de x. Donc $\forall x > 0$, $f''(x) > 0$. Ce qui implique la convexité de f sur $\mathbf{R}_+^*$.

2. Comme

$$f'(1) = 1 - \frac{1}{1^2} = 0,$$
$$f(1) = 1 + \frac{1}{1} = 2,$$

cette tangente a pour équation $y = 0(x-1) + 2$, ce qui se réécrit $y = 2$.

3. Par convexité de f, $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de T, ce qui se traduit par l'inégalité demandée.

Exercice 11

1. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5 \times 2xe^x + 5x^2e^x = (10x + 5x^2)e^x = 5x(2+x)e^x \\ f''(x) &= (10+10x)e^x + (10x+5x^2)e^x = (10+10x+10x+5x^2)e^x \\ &= (5x^2+20x+10)e^x = 5(x^2+4x+2)e^x \end{aligned}$$

2. En utilisant la forme la plus factorisée de f', on voit que cette dérivée est du signe de $5x(x+2)$, l'exponentielle étant strictement positive sur $\mathbf{R}$. Ce polynôme du second degré a deux racines (0 et -2) et un coefficient dominant positif. D'où le tableau suivant :

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
Signe de f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f		$\nearrow$	$20e^{-2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	

$$f(-2) = 5(-2)^2e^{-2} = 20e^{-2}$$
$$f(0) = 5 \times 0 \times e^0 = 0$$

3. On étudie le signe de f'' pour obtenir la convexité de f. Ce signe est en fait celui du polynôme x^2+4x+2 (quitte à diviser $f''(x)$ par $5e^x$). On le factorise en passant par la forme canonique :

$$\begin{aligned} x^2+4x+2 &= x^2+4x+4-2 \\ &= (x+2)^2-2 = (x+2)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2 \\ &= (x+2+\sqrt{2})(x+2-\sqrt{2}) \\ &= \left(x-\left(-2-\sqrt{2}\right)\right)\left(x-\left(-2+\sqrt{2}\right)\right) \end{aligned}$$

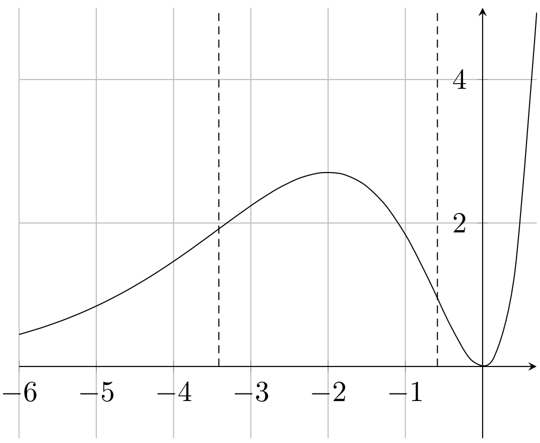
On a les racines, le coefficient dominant est positif, on peut donc dresser le tableau suivant :

x	$-\infty$		$-2-\sqrt{2}$		$-2+\sqrt{2}$		$+\infty$
Signe de f''		$+$	0	$-$	0	$+$	
Convexité de f		*convexe*		*concave*		*convexe*	

4. D'après le tableau précédent, on en déduit la présence de deux points d'inflexions dont les coordonnées sont :

$$\left(-2-\sqrt{2}; f\left(-2-\sqrt{2}\right)\right)$$
$$\left(-2+\sqrt{2}; f\left(-2+\sqrt{2}\right)\right)$$

5. Vous devriez obtenir quelque chose de ce genre :



Les droites verticales pointillées représente les abscisses des points d'inflexions.

Exercice 12

1. Soit $x \in [0;5]$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x+2)e^{-x} + (x^2+2x)(-e^{-x}) \\ &= (2x+2-(x^2+2x))e^{-x} \\ &= (-x^2+2)e^{-x} \end{aligned}$$

2. Dérivons f' à partir de l'expression ci-dessus :

$$\begin{aligned} \forall x \in [0;5],\ f''(x) &= (-2x)e^{-x} + (-x^2+2)(-e^{-x}) \\ &= (-2x-(-x^2+2))e^{-x} \\ &= (x^2-2x-2)e^{-x} \end{aligned}$$

3. L'exponentielle étant positive, f'' est du signe du polynôme x^2-2x-2. Son discriminant vaut $(-2)^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 12 > 0$. Il a donc deux racines x_1,x_2 données par

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-(-2)-\sqrt{12}}{2 \times 1} = 1-\sqrt{3} \\ x_2 &= \frac{-(-2)+\sqrt{12}}{2 \times 1} = 1+\sqrt{3} \end{aligned}$$

Or x^2-2x-2 ayant un coefficient dominant positif, on peut dresser le tableau suivant :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
Signe de f''		$+$	0	$-$	0	$+$	
Convexité de f		*convexe*		*concave*		*convexe*	

f est donc concave sur $[1-\sqrt{3}; 1+\sqrt{3}]$.

4. D'après le tableau précédent, les points d'inflexions ont pour coordonnées

$$(x_1; f(x_1))$$
$$(x_2; f(x_2))$$

Exercice 13

1. Dérivons deux fois f_1 : soit $x \in \mathbf{R}$, on a alors

$$f_1'(x) = 3x^2 - 10x + 4$$
$$f_1''(x) = 6x - 10$$

f_1'' est donc une fonction affine de pente positive s'annulant en $\frac{10}{6} = \frac{5}{3}$. D'où le tableau suivant :

x	$-\infty$		$5/3$		$+\infty$
Signe de f_1''		$-$	0	$+$	
Convexité de f_1		*concave*		*convexe*	

2. Dérivons deux fois f_2 : soit $x \in \mathbf{R}^*$, on a ainsi

$$f_2'(x) = \frac{1}{2} - 3\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{3}{x^2}$$
$$f_2''(x) = 3 \times \left(-\frac{2x}{x^4}\right) = \frac{-6}{x^3}$$

$f_2''(x)$ est une fraction de numérateur négatif, son signe est donc l'opposé de celui de x^3 qui, par la règle des signes, est du signe de x. D'où le tableau suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de x^3		$-$	‖	$+$	
Signe de f''		$+$	‖	$-$	
Convexité de f		*convexe*	‖	*concave*	

3. Dérivons deux fois f_3 : soit $x \in \mathbf{R}$, on obtient alors :

$$\begin{aligned} f_3'(x) &= 3e^{-3x+4} + (3x-49)(-3e^{-3x+4}) \\ &= (3 + (3x-49)(-3))e^{-3x+4} \\ &= (-9x+150)e^{-3x+4} \\ f_3''(x) &= (-9)e^{3x+4} + (-9x+150)(-3e^{-3x+4}) \\ &= (-9 + (-9x+150)(-3))e^{-3x+4} \\ &= (27x-459)e^{-3x+4} \end{aligned}$$

Comme l'exponentielle est positive, f_3'' est du signe de la fonction affine $x \mapsto 27x - 459$. Celle-ci a une pente positive et s'annule en $\frac{459}{27} = 17$. D'où le tableau suivant :

x	$-\infty$		17		$+\infty$
Signe de f''		$-$	0	$+$	
Convexité de f		*concave*		*convexe*	

4. Dérivons deux fois f_4 : soit $x \in \mathbf{R}$, on a donc :

$$\begin{aligned} f_4'(x) &= \frac{4}{6}x^3 - x^2 + 2x - 5 \\ f_4''(x) &= \frac{12}{6}x^2 - 2x + 2 \\ &= 2(x^2 - x + 1) \\ &= 2\left(\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right) \geq 2 \times \frac{3}{4} > 0 \end{aligned}$$

On voit que f_4'' est positive sur tout $\mathbf{R}$, f_4 y est donc convexe.

5. Dérivons deux fois f_5 : soit $x \in \mathbf{R}$, on a ainsi :

$$\begin{aligned} f_5'(x) &= -(-e^{-x})(x^2 + 7x + 15) - e^{-x}(2x + 7)) + 3 \\ &= e^{-x}(x^2 + 7x + 15 - (2x + 7)) + 3 \\ &= e^{-x}(x^2 + 5x + 8) + 3 \\ f_5''(x) &= -e^{-x}(x^2 + 5x + 8) + e^{-x}(2x + 5) \\ &= e^{-x}(-x^2 - 5x - 8 + 2x + 5) \\ &= e^{-x}(-x^2 - 3x - 3) = -e^{-x}(x^2 + 3x + 3) \end{aligned}$$

Comme $\forall x \in \mathbf{R}$, $-e^{-x} < 0$, f_5'' est du signe de x^2+3x+3. Ce polynôme a pour discriminant $3^2 - 4\times3\times1 = -3 < 0$. Il n'a donc pas de racines réelles et il est donc partout du signe de son coefficient dominant, c'est-à-dire positif. f_5 est donc convexe sur $\mathbf{R}$.

Exercice 14

1. **a.** Soit $x \in \mathbf{R}$, on a $f'(x) = \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{2}x$.

b. Cela revient à montrer que $f'(x) = 0$ a deux solutions sur $[0; 5]$. Or

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\iff \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{2}x = 0 \\ &\iff x\left(\frac{3}{8}x - \frac{3}{2}\right) = 0 \\ &\iff x \in \{0; 4\} \end{aligned}$$

Ces deux solutions sont bien dans l'intervalle voulu. cqfd.

c. f' est un polynôme dont on vient de trouver les racines : 0 et 4. Son coefficient dominant est positif, d'où le tableau :

x	0		4		5
Signe de f'		$-$	0	$+$	
Variations de f	4	↘	0	↗	$\frac{7}{8}$

Attention, ici une des racines de f' est sur le bord de l'intervalle de définition de f.

2. **a.** On va étudier complètement la convexité de f. Sa dérivée seconde donne : $\forall x \in [0; 5]$, $f''(x) = \frac{3}{4}x - \frac{3}{2}$. C'est une fonction affine de pente positive s'annulant en 2, d'où le tableau suivant

x	0		2		5
Signe de f''		$-$	0	$+$	
Convexité de f		*concave*		*convexe*	

$\mathcal{C}_f$ a donc un point d'inflexion dont les coordonnées sont $(2; f(2))$, c'est-à-dire $(2; 2)$.

b. Comme

$$f'(2) = \frac{3}{2} - 3 = -\frac{3}{2}$$
$$f(2) = 2$$

la tangente a pour équation $y = -\frac{3}{2}(x-2)+2$, ce qui se réécrit $y = -\frac{3}{2}x + 5$.

c. I est un point d'inflexion. $\mathcal{C}_f$ est donc d'abord en dessous, puis au-dessus de T.

Exercice 15

1. Soit f,g les deux fonctions deux fois dérivables et convexes. On a alors, pour tout $x \in \mathbf{R}$

$$f''(x) \geq 0$$
$$g''(x) \geq 0$$

Donc, $\forall x \in \mathbf{R}$, $(f+g)''(x) = f''(x) + g''(x) \geq 0$, car une somme de termes positifs l'est aussi.
L'affirmation est vraie.

2. Si elle est convexe sur un intervalle, sa dérivée seconde [1] y est positive. Elle reste positive sur tout sous-intervalle, et donc la fonction reste convexe sur tout sous-intervalle. L'affirmation est fausse... dans la plupart des cas. Notre fonction peut être à la fois convexe et concave sur $[2; 3]$. Sa dérivée seconde est alors nulle sur cet intervalle, c'est-à-dire que notre fonction y sera affine.

3. C'est la définition d'un point d'inflexion : l'affirmation est vraie.

Exercice 16

1. On dérive deux fois f : soit $x \in \mathbf{R}$, on a alors :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \times e^x + xe^x \\ &= (x+1)e^x \\ f''(x) &= 1 \times e^x + (x+1)e^x \\ &= (x+2)e^x \end{aligned}$$

L'exponentielle étant toujours positive, $f''(x)$ a le signe de $x+2$:

1. On suppose pour simplifier que celle-ci existe

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
Signe de f''		$-$	0	$+$	
Convexité de f		*concave*		*convexe*	

2. Comme

$$f'(0) = 1e^0 = 1$$
$$f(0) = 0 + 1 = 1$$

l'équation de la tangente est donc $y = 1(x - 0) + 1$, ce qui se réécrit $y = x + 1$.

3. Cette inégalité se déduit de la convexité de f sur l'intervalle $[-2; +\infty[$.

4. Soit $x \in \mathbf{R}$:

$$\begin{aligned} f(x) \geq x + 1 &\iff xe^x + 1 \geq x + 1 \\ &\iff xe^x - x \geq 0 \\ &\iff x(e^x - 1) \geq 0 \end{aligned}$$

Faisons un tableau de signe. La deuxième ligne provient de la croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbf{R}$ et de sa valeur en 0.

x	$-\infty$		0		$-\infty$
Signe de x		$-$	0	$+$	
Signe de $e^x - 1$		$-$	0	$+$	
Signe de $x(e^x - 1)$		$+$	0	$+$	

L'inégalité est donc toujours vérifiée :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) \geq x + 1.$$

Ce résultat est légèrement plus fort que celui de la question 2. puisqu'on a cette fois l'inégalité sur $\mathbf{R}$ tout entier.