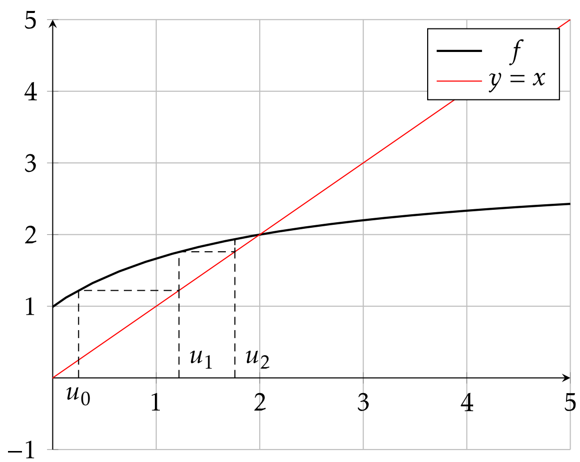
Exercice 44p31

1. Il s'agit de la fonction f définie par $\forall x \geq 0$, $f(x) = \frac{3x+2}{x+2}$.
2. Dérivons f sur $[0;+\infty[$:

$$f'(x) = \frac{3(x+2)-(3x+2)1}{(x+2)^2} = \frac{3x+6-3x-2}{(x+2)^2} = \frac{4}{(x+2)^2}.$$

Le numérateur et le dénominateur de cette fraction sont tous deux positifs, elle l'est donc aussi. f est donc croissante sur $[0;+\infty[$.

3. Voici le graphique :



   (a) cf. graphique
   (b) La suite a l'air croissante.
   (c) La suite semble majorée par 2.

4. (a) On procède par récurrence.

Initialisation On veut montrer $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 2$. Or

$$u_0 = 0{,}25$$
$$u_1 = f(u_0) = \frac{3/4+2}{1/4+2} = \frac{3+8}{1+8} = \frac{11}{9} \approx 1{,}22$$

On a donc bien $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 2$.

Hérédité Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons que $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$. Montrons que $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 2$. Or, par croissance de la fonction f, on a

$$\begin{aligned} 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2 &\implies f(0) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(2) \\ &\implies 1 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 2 \end{aligned}$$

Comme $0 \leq 1$, on a donc montré que $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 2$.

(b) Ce que l'on vient de montrer entraîne

$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_n \leq u_{n+1},$$
$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_n \leq 2.$$

C'est-à-dire que la suite est croissante et majorée par 2. Nos conjectures sont bien démontrées.

Exercice 45p31

1. (a)

$$u_1 = \frac{2}{5} \times 8 + 3 = \frac{31}{5} = 6{,}2$$
$$u_2 = \frac{2}{5} \times \frac{31}{5} + 3 = \frac{137}{25} = 5{,}48$$

   (b) La suite paraît décroissante.

2. On procède par récurrence.

Initialisation Montrons que $u_0 \geq u_1 \geq 5$.

$$u_0 = 8$$
$$u_1 = 6{,}2$$

On a donc bien $u_0 \geq u_1 \geq 5$.

Hérédité Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons que $u_n \geq u_{n+1} \geq 5$. Montrons que $u_{n+1} \geq u_{n+2} \geq 5$. Or, en appliquant la fonction croissante $x \mapsto \frac{2}{5}x + 3$ à l'hypothèse, on a :

$$\begin{aligned} u_n \geq u_{n+1} \geq 5 &\implies f(u_n) \geq f(u_{n+1}) \geq f(5) \\ &\implies u_{n+1} \geq u_{n+2} \geq \underbrace{f(5)}_{=5} \\ &\implies u_{n+1} \geq u_{n+2} \geq 5 \end{aligned}$$

cqfd. Notre conjecture est donc bien vérifiée : la suite est décroissante.

3. (a) On veut montrer $\forall n \in \mathbf{N}$, $v_{n+1} = \frac{2}{5} v_n$. Soit $n \in \mathbf{N}$.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 5 \\ &= \frac{2}{5} u_n + 3 - 5 \\ &= \frac{2}{5} u_n - 2 \\ &= \frac{2}{5} \left(u_n - \frac{2}{\frac{2}{5}} \right) \\ &= \frac{2}{5} (u_n - 5) = \frac{2}{5} v_n \end{aligned}$$

cqfd.

(b) v est une suite géométrique de raison 2/5 et de premier terme $v_0 = u_0 - 5 = 8 - 5 = 3$. On en déduit donc que pour tout n

$$v_n = 3 \left(\frac{2}{5} \right)^n$$

4. Comme $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n = v_n + 5$, on déduit donc de la question précédente que pour tout n $u_n = 3 \left(\frac{2}{5} \right)^n + 5$
5. On a donc

$$u_{100} = 3 \left(\frac{2}{5} \right)^{100} + 5 \approx 5$$

La différence entre u_{100} et 5 est de l'ordre de 10^{-40}.

Exercice 47p31

1. On procède donc par récurrence.

Initialisation Montrons que $1 \leq u_0 \leq e^2$. Or $u_0 = 1$, et $e^2 \approx 7{,}38$. Ainsi on a bien $1 \leq u_0 \leq e^2$.

Hérédité Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons que $1 \leq u_n \leq e^2$. Montrons que $1 \leq u_{n+1} \leq e^2$. Or, en appliquant la fonction croissante [1] $x \mapsto e\sqrt{x}$ à l'hypothèse, on a

$$\begin{aligned} 1 \leq u_n \leq e^2 &\implies e\sqrt{1} \leq e\sqrt{u_n} \leq e\sqrt{e^2} \\ &\implies e \leq u_{n+1} \leq e \times e = e^2 \end{aligned}$$

Comme $1 \leq e$, on a bien démontré que $1 \leq u_{n+1} \leq e^2$.

1. Il s'agit d'un multiple positif de la fonction racine, qui est bien croissante.

2. Étudions le signe de $u_{n+1} - u_n$ pour un n quelconque :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= e\sqrt{u_n} - u_n \\ &= \sqrt{u_n}(e - \sqrt{u_n}) \end{aligned}$$

Le premier terme de ce produit est positif, car c'est une racine. Le deuxième l'est aussi, car $u_n \leq e^2 \implies \sqrt{u_n} \leq e \implies 0 \leq e - \sqrt{u_n}$. Ainsi $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} - u_n \geq 0$, ce qui montre que la suite est croissante.

3. (a) On remarque que dans ce cas $u_1 = e\sqrt{2020} \approx 122$. La suite n'est donc pas croissante.

(b) Il suffit de reprendre le raisonnement par récurrence fait plus haut. Il n'y a que la valeur de u_0 à changer dans l'initialisation. Comme on a bien $1 \leq 2 \leq e^2$, la propriété reste donc braie pour $n = 0$, et donc la récurrence fonctionne. La conclusion est la même : u est croissante.

(c) Dire que la suite est croissante revient à dire que $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = u_n$. Or

$$\begin{aligned} u_{n+1} = u_n &\iff e\sqrt{u_n} = u_n \\ &\iff \sqrt{u_n}(e - \sqrt{u_n}) = 0 \end{aligned}$$

En particulier, pour $n = 0$, soit $\sqrt{u_0} = 0$, soit $\sqrt{u_0} = e$. Que donne la deuxième possibilité ? On peut d'ailleurs la réécrire $u_0 = e^2$. Quelques essais semblent indiquer que $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n = e^2$. Montrons-le par récurrence, rapidement. L'initialisation est vraie, d'après la possibilité choisie pour u_0 : $u_0 = e^2$. Soit $n \in \mathbf{N}$, supposons que $u_n = e^2$. Alors $u_{n+1} = e\sqrt{u_n} = e\sqrt{e^2} = e \times e^2$. La propriété « $u_n = e^2$ » est donc héréditaire, en plus d'être initialisée. Elle est donc vraie pour tout n. L'affirmation de l'énoncé est donc fausse, car la suite peut être constante avec un premier terme non nul.

Exercice 48p31

Initialisation On veut montrer que $u_0 > 0$ et que $u_0 = \frac{2}{2\times0+1}$. Or $u_0 = 2$. Donc d'une part, on a bien $u_0 > 0$, et de l'autre, on a bien $\frac{2}{2\times0+1} = \frac{2}{1} = 2 = u_0$.

Hérédité Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons que $u_n > 0$ et $u_n = \frac{2}{2n+1}$. Montrons que $u_{n+1} > 0$ et $u_{n+1} = \frac{2}{2(n+1)+1}$

D'abord, grâce à notre première hypothèse :
- $u_n > 0$
- $1 + u_n > 1 > 0$

Donc, par quotient, $u_{n+1} > 0$.

Ensuite, en utilisant notre deuxième hypothèse :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{u_n}{1+u_n} \\ &= \frac{\frac{2}{2n+1}}{1+\frac{2}{2n+1}} \\ &= \frac{2}{2n+1+2} \\ &= \frac{2}{2(n+1)+1} \end{aligned}$$

cqfd.

Exercice 49p31

1. Fait en cours.
2. Fait en cours.
3. On remarque que la suite semble être minorée par 0 et majorée par son premier terme, c'est-à-dire $\frac{1}{3}$.

   Initialisation $v_1 = \frac{1}{3}$, qui est bien, au sens large, entre 0 et $\frac{1}{3}$.

   Hérédité Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Supposons que $0 \leq v_n \leq \frac{1}{3}$. Montrons que $0 \leq v_{n+1} \leq \frac{1}{3}$. On utilise la définition de la suite v : $v_{n+1} = \frac{n+1}{3n} v_n$. Donc v_{n+1} est le produit de v_n (positif par hypothèse) avec une fraction de deux entiers naturels. Donc $v_{n+1} \geq 0$.

   Comme de plus la suite est décroissante, on a $v_{n+1} \leq v_n$. L'hypothèse de majoration donne alors $v_{n+1} \leq v_n \leq \frac{1}{3}$. D'où $v_{n+1} \leq \frac{1}{3}$. cqfd.

Exercice 50p31

1. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n = 3 \times 5^n - 2$.

   Initialisation Montrons que $u_0 = 3 \times 5^0 - 2$. D'une part $u_0 = 1$ et d'autre part $3 \times 5^0 - 2 = 3 - 2 = 1$. cqfd.

   Hérédité Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons que $u_n = 3 \times 5^n - 2$. Montrons que $u_{n+1} = 3 \times 5^{n+1} - 2$. Or

   $$\begin{aligned} u_{n+1} &= 5u_n + 8 \\ &= 5(3 \times 5^n - 2) + 8 \\ &= 3 \times 5^{n+1} - 10 + 8 \\ &= 3 \times 5^{n+1} - 2 \end{aligned}$$

   cqfd.
2. (a) Montrons que $\forall n \in \mathbf{N}$, $v_{n+1} = 5v_n$. Soit $n \in \mathbf{N}$. On a

   $$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} + 2 \\ &= 5u_n + 8 + 2 \\ &= 5u_n + 10 \\ &= 5(u_n + 2) \\ &= 5v_n. \end{aligned}$$

   cqfd.

   (b) v est géométrique de raison 5 et son premier terme est donné par $v_0 = u_0 + 2 = 1 + 2 = 3$. D'où :

   $$\forall n \in \mathbf{N},\ v_n = 3 \times 5^n.$$

   Comme $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n = v_n - 2$, on en déduit que $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n = 3 \times 5^n - 2$, ce qui est bien l'expression de la première question.

Exercice 51p31

1.
$$u_1 = \frac{u_0}{\sqrt{u_0^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$u_2 = \frac{u_1}{\sqrt{u_1^2+1}} = \frac{1/\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{1}{2}+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{2}+1}} = \frac{1}{\sqrt{1+2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$u_3 = \frac{u_2}{\sqrt{u_2^2+1}} = \frac{1/\sqrt{3}}{\sqrt{\frac{1}{3}+1}} = \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{\frac{1}{3}+1}} = \frac{1}{\sqrt{1+3}} = \frac{1}{\sqrt{4}}$$

2. On peut conjecturer que

$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

3. On procède par récurrence.

Initialisation D'une part $u_0 = 1$ et d'autre part $\frac{1}{\sqrt{0+1}} = 1$. La propriété est donc vraie pour $n = 0$.

Hérédité Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons que $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$. Montrons que $u_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+2}}$. Or

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{u_n}{\sqrt{u_n^2+1}} \\ &= \frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\sqrt{\frac{1}{n+1}+1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}\sqrt{\frac{1}{n+1}+1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1+1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+2}} \end{aligned}$$

cqfd.