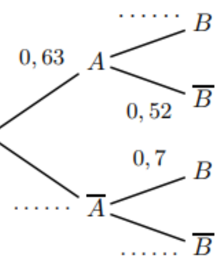
Exercice 1



1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-contre.

2. Calculer $\mathbf{P}(B)$ à l'aide de la formule des probabilités totales.

3. Construire l'arbre pondéré représentant la même situation en faisant figurer les évènements B et $\overline{B}$ au premier niveau et les évènements A et $\overline{A}$ au deuxième niveau.

Exercice 2

Pour chaque question, indiquer la seule réponse exacte. Un jeu vidéo possède une vaste communauté de joueurs en ligne. Avant de débuter une partie, le joueur doit choisir entre deux « mondes » : soit le monde A, soit le monde B. On choisit au hasard un individu dans la communauté des joueurs. Lorsqu'il joue une partie, on admet que :

— la probabilité que la joueur choisisse le mode A est égale à $\frac{2}{5}$;

— si le joueur choisit le mode A, la probabilité qu'il gagne la partie est de $\frac{7}{10}$;

— la probabilité que le joueur gagne la partie est de $\frac{12}{25}$

On considère les événements suivants :

— A : « le joueur choisit le mode A »

— B : « le joueur choisit le mode B »

— G : « le joueur gagne la partie ».

1. La probabilité que le joueur choisisse le monde A et gagne la partie est égale à :

a. $\dfrac{7}{10}$ b. $\dfrac{3}{25}$ c. $\dfrac{7}{25}$ d. $\dfrac{24}{125}$

2. La probabilité $\mathbf{P}_B(G)$ de l'événement G sachant que B est réalisé est :

a. $\dfrac{1}{5}$ b. $\dfrac{1}{3}$ c. $\dfrac{7}{15}$ d. $\dfrac{5}{12}$

Exercice 3

Dans un aéroport, les portiques de sécurité servent à détecter les objets métalliques que peuvent emporter les voyageurs. On choisit au hasard un voyageur franchissant un portique. On note :

— S l'évènement « le voyageur fait sonner le portique »

— M l'évènement « le voyageur porte un object métallique »

On considère que :

— un voyageur sur 500 porte sur lui un objet métallique.

— lorsqu'un voyageur franchit le portique avec un objet métallique, la probabilité que le portique sonne est égale à 0,98

— lorsqu'un voyageur franchit le portique sans objet métallique, la probabilité que le portique ne sonne pas est aussi égale à 0,98

1. À l'aide des données de l'énoncé, préciser les valeurs de $\mathbf{P}(M)$, $\mathbf{P}_M(S)$ et $\mathbf{P}_{\overline{M}}(\overline{S})$.

2. Représenter la situation par un arbre pondéré.

3. Montrer que $\mathbf{P}(S) = 0{,}02192$.

4. En déduire la probabilité qu'un voyageur porte un objet métallique sachant qu'il a fait sonner le portique (on arrondira le résultat à 10^{-3} près).

Exercice 4

A et B désignent deux évènements d'une même expérience aléatoire. Dans chacun des cas suivants, déterminer si les évènements A et B sont indépendants.

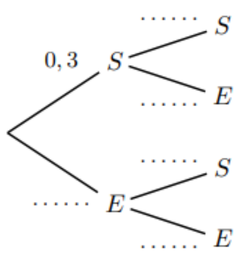
1. $\mathbf{P}(A) = \dfrac{1}{2}$; $\mathbf{P}(B) = \dfrac{1}{4}$ et $\mathbf{P}(A \cap B) = \dfrac{1}{6}$

2. $\mathbf{P}(A) = 0{,}27$; $\mathbf{P}(B) = 0{,}48$ et $\mathbf{P}_B(A) = 0{,}27$

3. $\mathbf{P}(A) = \dfrac{3}{5}$; $\mathbf{P}(B) = \dfrac{5}{7}$ et $\mathbf{P}(A \cap B) = \dfrac{3}{7}$

Exercice 5

Voici un arbre pondéré incomplet modélisant la répétition d'une même expérience aléatoire de manière indépendante, avec deux issues : S et E.



1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-contre.

2. En déduire la probabilité d'obtenir exactement un succès.

Exercice 6

Un centre culturel propose différents types de spectacles au cours de l'année. 30 % sont des pièces de théâtre, 20 % sont des spectacles de danse et les autres sont des concerts. De plus, 10 % des pièces de théâtre, 60 % des spectacles de danse et 30 % des concerts de déroulent en plein air. Lors d'une loterie, une personne gagne une place choisie eu hasard parmi tous les spectacles proposés. On note les évènements suivants :

— T : « le spectacle est une pièce de théâtre »

— D : « le spectacle est un spectacle de danse »

— C : « le spectacle est un concert »

— A : « le spectacle se déroule en plein air »

1. À l'aide des données de l'énoncé, préciser les valeurs de $\mathbf{P}(T)$, $\mathbf{P}(D)$ et $\mathbf{P}_D(A)$.

2. Construire un arbre pondéré modélisant cette situation.

3. Montrer que $\mathbf{P}(A) = 0{,}3$.

4. Les évènements A et C sont-ils indépendants ?

5. Le spectacle se joue en plein air. Quelle est la probabilité que ce soit un spectacle de danse ?

Exercice 7

Dans une entreprise, on s'intéresse à la probabilité qu'un salarié soit absent durant une période d'épidémie de grippe.

— Un salarié malade est absent.

— La première semaine de travail, le salarié n'est pas malade.

— Si la semaine n le salarié n'est pas malade, alors il tombe malade la semaine $n+1$ avec une probabilité égale à 0,04.

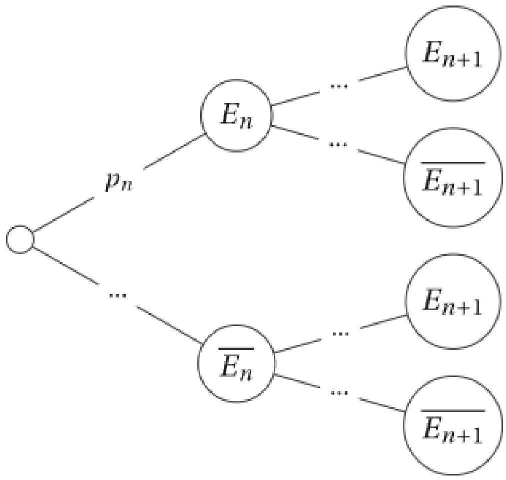
— Si la semaine n le salarié est malade, alors il reste malade la semaine $n+1$ avec une probabilité égale à 0,24.

On désigne, pour tout entier naturel $n \geq 1$, par E_n l'évènement « le salarié est absent pour cause de maladie la n-ième semaine ». On note p_n la probabilité de l'évènement E_n. On a ainsi $p_1 = 0$.

1. **a.** Déterminer la valeur de p_3 à l'aide d'un arbre pondéré.

b. Sachant que le salarié a été absent pour cause de maladie la troisième semaine, déterminer la probabilité qu'il ait été aussi absent pour cause de maladie la deuxième semaine.

2. **a.** Recopier sur la copie et compléter l'arbre pondéré donné ci-dessous



b. Montrer que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a $p_{n+1} = 0{,}2p_n + 0{,}04$.

c. Montrer que la suite (u_n) définie pour tout naturel $n \geq 1$ par $u_n = p_n - 0{,}05$ est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison r.

d. En déduire l'expression de u_n puis de p_n en fonction de n et r.

e. En déduire la limite de la suite (p_n)

Exercice 8

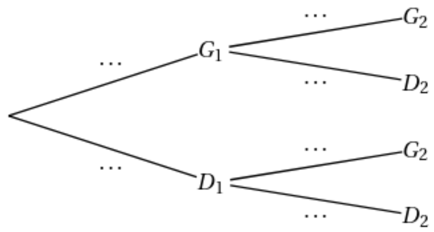
Léa passe une bonne partie de ses journées à jouer à un jeu vidéo et s'intéresse aux chances de victoire de ses prochaines parties.
Elle estime que si elle vient de gagner une partie, elle gagne la suivante dans 70 % des cas.
Mais si elle vient de subir une défaite, d'après elle, la probabilité qu'elle gagne la suivante est de 0,2.
De plus, elle pense avoir autant de chance de gagner la première partie que de la perdre.
On s'appuiera sur les affirmations de Léa pour répondre aux questions de cet exercice.
Pour tout entier naturel n non nul, on définit les évènements suivants :

- G_n : « Léa gagne la n-ième partie de la journée » ;
- D_n : « Léa perd la n-ième partie de la journée ».

Pour tout entier naturel n non nul, on note g_n la probabilité de l'évènement G_n.
On a donc $g_1 = 0{,}5$.

1. Quelle est la valeur de la probabilité conditionnelle $\mathbf{P}_{G_1}(D_2)$?

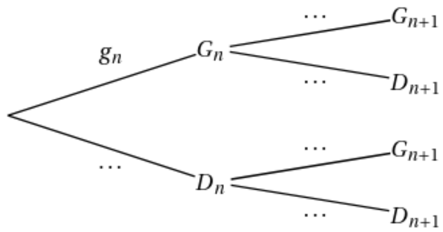
2. Recopier et compléter l'arbre des probabilités ci-dessous qui modélise la situation pour les deux premières parties de la journée :



3. Calculer g_2.

4. Soit n un entier naturel non nul.

a. Recopier et compléter l'arbre des probabilités ci-dessous qui modélise la situation pour les n-ième et $(n+1)$-ième parties de la journée.



b. Justifier que pour tout entier naturel n non nul,

$$g_{n+1} = 0{,}5g_n + 0{,}2.$$

5. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $v_n = g_n - 0{,}4$.

a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique.
On précisera son premier terme et sa raison.

b. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul :

$$g_n = 0{,}1 \times 0{,}5^{n-1} + 0{,}4.$$

6. Étudier les variations de la suite (g_n).

7. Donner, en justifiant, la limite de la suite (g_n).
Interpréter le résultat dans le contexte de l'énoncé.

8. Déterminer le plus petit entier n tel que $g_n - 0{,}4 \leqslant 0{,}001$.

9. Recopier et compléter les lignes 4, 5 et 6 de la fonction suivante, écrite en langage Python, afin qu'elle renvoie le plus petit rang à partir duquel les termes de la suite (g_n) sont tous inférieurs ou égaux à $0{,}4 + e$, où e est un nombre réel strictement positif.

```
def seuil(e) :
    g = 0.5
    n = 1
    while ... :
        g = 0.5 * g + 0.2
        n = ...
    return (n)
```

Exercice 9

Soit X la variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée par le tableau ci-dessous.

x_i	-3	1	4
$\mathbf{P}(X = x_i)$	0,2	0,3	0,5

Calculer l'espérance de X, sa variance et son écart-type (arrondir à 10^{-2} près).

Exercice 10

Soit X la variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée par le tableau ci-dessous (a est un réel).

x_i	-2	2	4	10
$\mathbf{P}(X = x_i)$	a	0,1	0,4	0,3

Déterminer le réel a puis calculer l'espérance de X, sa variance et son écart-type (arrondir à 10^{-2} près).

Exercice 11

On lance un dé icosaédrique, dont les faces sont numérotées de 1 à 20, que l'on suppose bien équilibré.
On marque :

- 2 points si le nombre obtenu est pair
- 3 points si le nombre obtenu est premier
- 5 points si le nombre obtenu est un multiple de 5
- 7 points si le nombre obtenu est un carré parfait

Les points sont cumulables.

Soit X la variable aléatoire qui associe au lancer du dé le nombre de points marqués par le joueur.

On pourra compléter le tableau suivant avant de commencer.

Face	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
Pair ?																				
Premier ?																				
Multiple de 5 ?																				
Carré parfait ?																				
Total des points																				

1. Déterminer la loi de probabilité de X.

2. En déduire $\mathbf{P}(X \leq 5)$, $\mathbf{P}(3 \leq X \leq 7)$ et $\mathbf{P}(X > 7)$.

3. Calculer $\mathbf{E}(X)$ et interpréter le résultat.

4. Calculer $\mathbf{V}(X)$ et $\sigma(X)$.

Exercice 12

Le gérant d'un casino désire créer un nouveau jeu. Un participant doit au préalable miser 5 €. Une fois la mise donnée, il lance deux dés à six faces et on soustrait le plus petit nombre obtenu au plus grand (résultat toujours positif ou nul). Si le résultat est supérieur ou égal à 3, alors le joueur reçoit n €, sinon il perd sa mise.

1. Montrer que la probabilité que le joueur perde sa mise est égale à $\dfrac{2}{3}$.

2. En déduire la probabilité que ce joueur gagne la partie.

3. Déterminer la plus grande valeur de n (à l'€ près) afin que ce jeu reste avantageux pour le casino.

Exercice 13

Un propriétaire d'une salle louant des terrains de squash s'interroge sur le taux d'occupation de ses terrains. La location d'un terrain dure 1h00. Les heures sont classées en deux catégories : les heures pleines (soir et week-end) et les heures creuses (le reste de la semaine).
Dans le cadre de cette répartition, 70 % des heures sont creuses.
Une étude statistique sur une semaine lui a permis de s'apercevoir que :

— Lorsque l'heure est creuse, 20 % des terrains sont occupés ;

— Lorsque l'heure est pleine, 90 % des salles sont occupés.

On choisit au hasard une heure durant la période d'ouverture et un terrain de la salle. On considère les événements C : «l'heure est creuse» et T : «le terrain est occupé».

1. a. Représenter cette situation par un arbre de probabilités.

b. Déterminer la probabilité que le terrain soit occupé et que l'heure soit creuse.

c. Déterminer la probabilité que le terrain soit occupé.

d. Montrer que la probabilité que l'heure soit pleine, sachant que le terrain est occupé, est égale à $\frac{27}{41}$.

Dans le but d'inciter ses clients à venir hors des heures de grandes fréquentations, le propriétaire a instauré des tarifs différenciés :

— 10€ pour une heure pleine,

— 6€ pour une heure creuse.

On note X la variable aléatoire qui prend pour valeur la recette en euros obtenue grâce à la location d'un terrain de la salle, choisi au hasard.

2. a. Quelles sont les valeurs prises par X ?

b. Construire le tableau décrivant la loi de probabilité de X.

c. Déterminer l'espérance de X.

d. La salle comporte 10 terrains et est ouverte 70 heures par semaine. Calculer la recette hebdomadaire moyenne de la salle.

Exercice 14

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0{,}65$.
En détaillant la démarche, calculer les valeurs suivantes. Si nécessaire, arrondir au millième.

1. $\mathbf{E}(X)$ **2.** $\mathbf{V}(X)$ **3.** $\mathbf{P}(X = 8)$ **4.** $\mathbf{P}(X \leq 8)$

5. $\mathbf{P}(X < 15)$ **6.** $\mathbf{P}(X \geq 9)$ **7.** $\mathbf{P}(X > 10)$ **8.** $\mathbf{P}(7 \leq X \leq 14)$

9. $\mathbf{P}_{7 \leq X \leq 14}(X < 15)$ **10.** $\mathbf{P}_{X<15}(7 \leq X \leq 14)$ **11.** $\mathbf{P}_{X \leq 10}(X = 9)$

Exercice 15

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres $n = 12$ et $p = 0{,}39$.
Déterminer l'entier k pour lequel la probabilité $\mathbf{P}(X = k)$ est maximale.

Exercice 16

Pour se rendre de son domicile au lycée, Amine doit traverser quatre passages piétons équipés d'un feu tricolore. Il estime que les feux ne sont pas synchronisés et que la probabilité d'arriver à un passage avec un feu rouge est égale à 0,6.
On note X le nombre de feux qui sont verts quand Amine y passe.

1. En termes d'évènements de probabilité, comment traduire le fait que les feux ne soient pas synchronisés ?

2. Déterminer la loi de probabilité suivie par X.

3. Aujourd'hui, à l'aller, tous les feux étaient verts. Quelle est la probabilité d'un tel évènement ?

4. Lors de ce trajet, est-il plus probable d'avoir un seul ou deux feux verts ?

5. Calculer $\mathbf{E}(X)$ et l'interpréter dans le contexte.

Exercice 17

Pendant une partie de jeu de rôle, l'elfe joué par Delphine combat un troll. Deux stratégies sont possibles : une attaque normale ou une attaque spéciale.

1. Avec son attaque normale, elle doit lancer cinq dés à six faces. Pour vaincre le troll, elle doit obtenir au moins trois faces d'une valeur de 5 ou plus. Quelle est la probabilité de le vaincre durant cette phase à l'aide d'une attaque normale ? *Indication : on pourra considérer X la variable aléatoire qui compte, parmi les 5 dés lancés, le nombre de dés ayant donné au moins 5.*

2. Avec une attaque spéciale, elle lance deux dés. Si elle obtient au moins un 6, l'ennemi est tué.
Quelle est la probabilité de vaincre le troll durant cette phase à l'aide d'une attaque spéciale ? *Indication : on pourra considérer Y la variable aléatoire qui compte, parmi les 2 dés lancés, le nombre de dés ayant donné 6.*

3. Quelle est l'attaque la plus efficace ?

Exercice 18

Soient n un entier naturel non nul, p un réel appartenant à $[0\,;\,1]$ et X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p.
Parmi les propositions suivantes, préciser, en justifiant, celles qui sont toujours vraies.

1. $\mathbf{P}(X = n) = \mathbf{P}(X \leq n)$ **2.** $\mathbf{P}(X = 0) = \mathbf{P}(X \leq 0)$

3. À p fixé, plus n est grand, plus $\mathbf{E}(X)$ est grande.

4. À n fixé, plus p est grand, plus $\mathbf{E}(X)$ est grande.

5. À p fixé, plus n est grand, plus $\mathbf{V}(X)$ est grande.

6. À n fixé, plus p est grand, plus $\mathbf{V}(X)$ est grande.

Exercice 19

Voulant profiter du fait que tous les passagers ne se présentent pas à l'embarquement, une compagnie aérienne pratique la surréservation : elle vend 125 billets pour un vol pouvant embarquer 120 passagers. La probabilité qu'un passager ne se présente pas à l'embarquement vaut 0,1 et on supposera que tous les passagers se comportent de manière identique et indépendante.

1. Quelle est la probabilité que tous les passagers qui se présentent à l'embarquement puissent monter à bord ?

2. Quelle est la probabilité qu'il reste des places libres à bord ?

3. En moyenne, combien de passagers se présentent à l'embarquement ?

4. La compagnie cherche à vendre encore plus de billets pour le vol. À combien de billets doit-elle se limiter si elle souhaite que la probabilité de devoir refuser l'entrée à au moins un passager reste inférieure à 0,05 ?

Exercice 20

Dans un lycée, la probabilité qu'un élève rencontré au hasard fasse du sport dans une association est de 32%. On rencontre au hasard et successivement n élèves. On admet que la variable aléatoire X, qui compte le nombre d'élèves faisant du sport dans une association, suit une loi binomiale de paramètres n et $p = 0{,}32$. Dans les réponses aux questions suivantes, les probabilités seront arrondies au centième.

1. Dans cette question, $n = 10$. Quelle est la probabilité qu'au moins un élève fasse du sport dans une association ?

2. Dans cette question, n n'est pas fixé. Combien doit-on rencontrer d'élèves pour que la probabilité qu'au moins un élève fasse du sport dans une association soit supérieure à 99,9% ?

Pour aller plus loin

Exercice 21

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres n et p dont voici la loi de probabilité :

x_i	0	1	2	3	4	5	6
$\mathbf{P}(X = x_i)$	$\dfrac{64}{15625}$	$\dfrac{576}{15625}$	$\dfrac{432}{3125}$	$\dfrac{864}{3125}$	$\dfrac{972}{3125}$	$\dfrac{2916}{15625}$	$\dfrac{729}{15625}$

Déterminer les valeurs des deux paramètres n et p de la loi binomiale.

Exercice 22

Soit X une variable aléatoire.

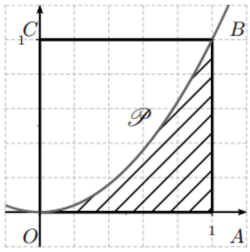
1. Sachant que son espérance vaut 19,2 et que sa variance vaut 3,84, X peut-elle suivre une loi binomiale ?

2. Même question avec $\mathbf{E}(X) = 18{,}72$ et $\mathbf{V}(X) = 13{,}104$.

Exercice 23 (algorithmique : méthode de Monte Carlo)

Objectif : on se propose de déterminer une valeur approchée d'une aire en utilisant une probabilité.

1. On considère l'aire du domaine hachuré ci-contre, délimité par les droites d'équation $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ et l'arc de parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = x^2$.



Archimède a montré dans *La quadrature de la parabole* que l'aire de ce domaine est exactement $\dfrac{1}{3}$. On choisit au hasard un point dans le carré $OABC$. On admet que la probabilité que ce point se trouve dans le domaine hachuré est égale à l'aire de ce domaine.

a. Quelles conditions vérifient les coordonnées $(x; y)$ d'un point M situé :

— dans le carré $OABC$.

— dans le domaine hachuré

Voici une fonction écrite en langage Python pour simuler 10 000 fois cette expérience aléatoire.

```
1  from random import *
2
3  def Aire():
4      C=0
5      for i in range(10000):
6          x=random()
7          y=random()
8          if y<=x**2:
9              C=C+1
10     F=C/10000
11     return F
```

b. Expliquer les lignes 6 et 7 du programme.

c. Expliquer la ligne 8 du programme.

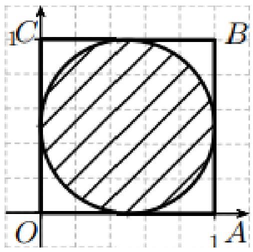
d. Que représente la variable C ?

e. Expliquer la ligne 10 du programme.

f. On a testé ce programme, on a obtenu 0,3257. En déduire une valeur approchée de l'aire du domaine hachuré.

2. POUR ALLER PLUS LOIN

On reprend la situation de la question 1. en remplaçant $\mathcal{P}$ par le disque inscrit dans le carré $OABC$.



a. Modifier la fonction précédente.

b. Saisir cette fonction et l'éxécuter afin d'obtenir une valeur approchée de l'aire du disque hachuré.

c. En déduire une approximation de π.