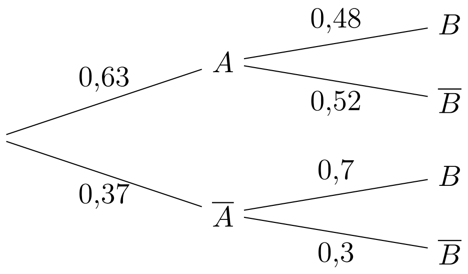
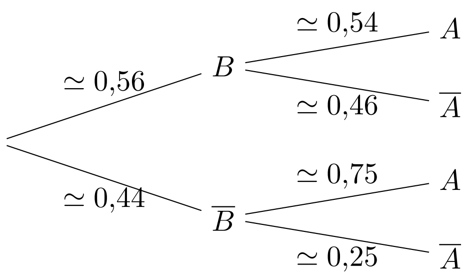
Corrigés des exercices

Exercice 1

1. On obtient



2. $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \times \mathbf{P}_A(B) = 0{,}63 \times 0{,}48 = 0{,}3024$.
   $\mathbf{P}(\overline{A} \cap B) = \mathbf{P}(\overline{A}) \times \mathbf{P}_{\overline{A}}(B) = 0{,}37 \times 0{,}7 = 0{,}259$.
   D'après la formule des probabilités totales :
   $\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A \cap B) + \mathbf{P}(\overline{A} \cap B) = 0{,}3024 + 0{,}259 = 0{,}5614$.
3. $\mathbf{P}_B(A) = \dfrac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)} = \dfrac{0{,}3024}{0{,}5614} \simeq 0{,}54$.
   $\mathbf{P}_{\overline{B}}(A) = \dfrac{\mathbf{P}(A \cap \overline{B})}{\mathbf{P}(\overline{B})} = \dfrac{0{,}63 \times 0{,}52}{1 - 0{,}5614} = \dfrac{0{,}3276}{0{,}4386} \simeq 0{,}75$.

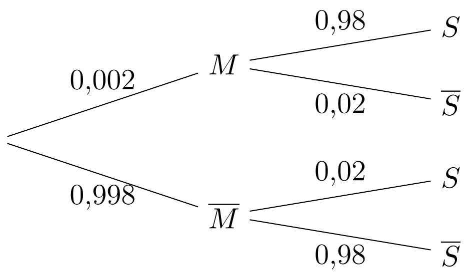


Exercice 2

1. On cherche $\mathbf{P}(A \cap G)$. Or
$$\mathbf{P}(A \cap G) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}_A(G) = \frac{2}{5} \times \frac{7}{10} = \frac{7}{25}.$$
   Réponse c.
2. Par la formule des probabilités totales, on sait que
$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(G) = \mathbf{P}(A \cap G) + \mathbf{P}(B \cap G) \\
\iff\ & \frac{12}{25} = \frac{7}{25} + \mathbf{P}(B)\mathbf{P}_B(G) \\
\iff\ & \frac{12}{25} = \frac{7}{25} + \frac{3}{5}\mathbf{P}_B(G) \\
\iff\ & \frac{5}{25} \times \frac{5}{3} = \mathbf{P}_B(G)
\end{aligned}$$
   Bref, $\mathbf{P}_B(G) = \frac{1}{3}$. **Réponse b.**

Exercice 3

1. $\mathbf{P}(M) = \dfrac{1}{500} = 0{,}002$
   $\mathbf{P}_M(S) = 0{,}98$
   $\mathbf{P}_{\overline{M}}(\overline{S}) = 0{,}98.$
2. L'arbre complété donne :

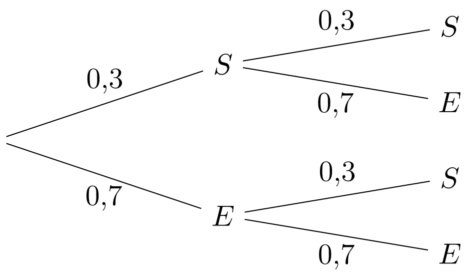


3. D'après la formule des probabilités totales :
   $\mathbf{P}(S) = \mathbf{P}(M \cap S) + \mathbf{P}(\overline{M} \cap S) = 0{,}002 \times 0{,}98 + 0{,}998 \times 0{,}02 = 0{,}00196 + 0{,}01996 = 0{,}02192.$
4. $\mathbf{P}_S(M) = \dfrac{\mathbf{P}(M \cap S)}{\mathbf{P}(S)} = \dfrac{0{,}00196}{0{,}02192} = 0{,}089$

Exercice 4

1. $\mathbf{P}(A) \times \mathbf{P}(B) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{8} \neq \mathbf{P}(A \cap B)$ donc A et B ne sont pas indépendants.
2. $\mathbf{P}_B(A) = \mathbf{P}(A)$ donc A et B sont indépendants.
3. $\mathbf{P}(A) \times \mathbf{P}(B) = \dfrac{3}{5} \times \dfrac{5}{7} = \dfrac{3}{7} = \mathbf{P}(A \cap B)$ donc A et B sont indépendants.

Exercice 5

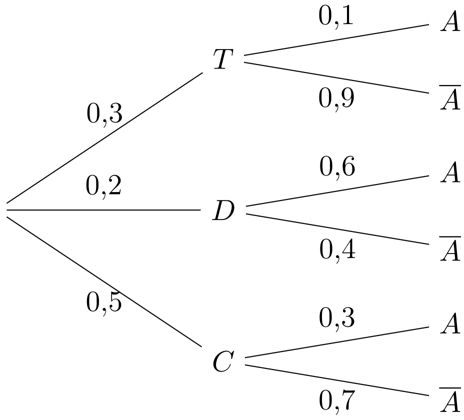


1.

2. On calcule $\mathbf{P}(SE) + \mathbf{P}(ES) = 0{,}3 \times 0{,}7 + 0{,}7 \times 0{,}3 = 2 \times 0{,}3 \times 0{,}7 = 0{,}42$

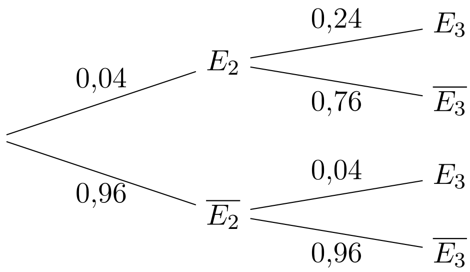
Exercice 6

1. $\mathbf{P}(T) = 0{,}3$, $\mathbf{P}(D) = 0{,}2$ et $\mathbf{P}_D(A) = 0{,}6$.

2. 

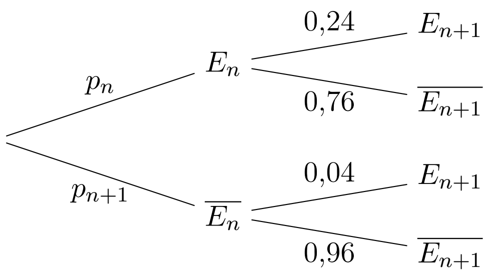
3. D'après la formule des probabilités totales :
   $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(T \cap A) + \mathbf{P}(D \cap A) + \mathbf{P}(C \cap A) = 0{,}3 \times 0{,}1 + 0{,}2 \times 0{,}6 + 0{,}5 \times 0{,}3 = 0{,}03 + 0{,}12 + 0{,}15 = 0{,}3$.
4. $\mathbf{P}_C(A) = \mathbf{P}(A) = 0{,}3$ donc A et C sont indépendants.
5. $\mathbf{P}_A(D) = \dfrac{\mathbf{P}(D \cap A)}{\mathbf{P}(A)} = \dfrac{0{,}12}{0{,}3} = 0{,}4$

Exercice 7

1. (a) 

   D'après la formule des probabilités totales :
   $p_3 = \mathbf{P}(E_3) = \mathbf{P}(E_2 \cap E_3) + \mathbf{P}(\overline{E_2} \cap E_3) = 0{,}04 \times 0{,}24 + 0{,}96 \times 0{,}04 = 0{,}0096 + 0{,}0384 = 0{,}048$

   (b) $\mathbf{P}_{E_3}(E_2) = \dfrac{\mathbf{P}(E_2 \cap E_3)}{\mathbf{P}(E_3)} = \dfrac{0{,}0096}{0{,}048} = 0{,}2$.

2. (a) 

   (b) D'après la formule des probabilités totales :
   $p_{n+1} = \mathbf{P}(E_{n+1}) = \mathbf{P}(E_n \cap E_{n+1}) + \mathbf{P}(\overline{E_n} \cap E_{n+1}) = p_n \times 0{,}24 + (1 - p_n) \times 0{,}04 = 0{,}24p_n + 0{,}04 - 0{,}04p_n = 0{,}2p_n + 0{,}04$.

   (c) Montrons que le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ est constant (il ne dépend pas de n) :
   $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{p_{n+1} - 0{,}05}{p_n - 0{,}05} = \dfrac{0{,}2p_n + 0{,}04 - 0{,}05}{p_n - 0{,}05} = \dfrac{0{,}2p_n - 0{,}01}{p_n - 0{,}05} = \dfrac{0{,}2(p_n - 0{,}05)}{p_n - 0{,}05} = 0{,}2$
   Ainsi (u_n) est une suite géométrique de raison $r = 0{,}2$ et de premier terme $u_1 = p_1 - 0{,}05 = 0 - 0{,}05 = -0{,}05$.

   (d) Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ on a $u_n = u_1 \times r^{n-1} = -0{,}05 \times 0{,}2^{n-1} = -0{,}25 \times 0{,}2^n$.
   Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ on a $u_n = p_n - 0{,}05$ donc $p_n = u_n + 0{,}05 = -0{,}05 \times 0{,}2^{n-1} + 0{,}05 = -0{,}25 \times$

$0{,}2^n + 0{,}05$.

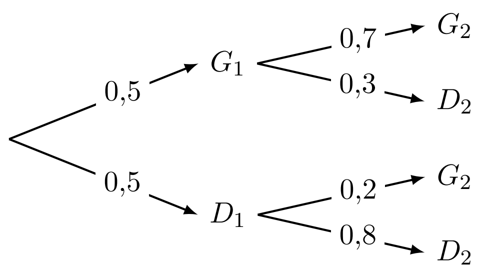
(e) $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}2^n = 0$ car $-1 < 0{,}2 < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \lim\limits_{n\to+\infty} -0{,}25 \times 0{,}2^n + 0{,}05 = 0{,}05$ par produit et somme de limites.

Exercice 8 D'après Asie 2024 – Jour 2

1. D'après l'énoncé, si elle vient de gagner une partie, elle gagne la suivante dans 70% des cas, elle perd donc la suivante dans 30 %.

   On a donc $\mathbf{P}_{G_1}(D_2) = 0{,}3$

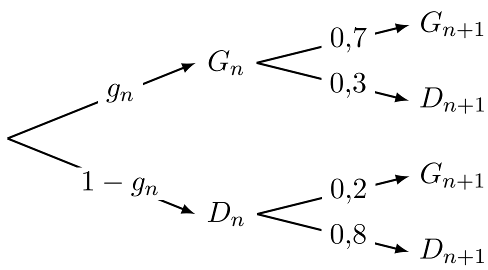
2. On a l'arbre suivant :



3. Les évènements G_1 et D_1 partitionnent l'univers, donc, d'après la loi des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} g_2 = \mathbf{P}(G_2) &= \mathbf{P}(G_1 \cap G_2) + \mathbf{P}(D_1 \cap G_2) \\ &= 0{,}5 \times 0{,}7 + 0{,}5 \times 0{,}2 \\ &= 0{,}35 + 0{,}1 \\ &= 0{,}45 \end{aligned}$$

4. (a) On a l'arbre suivant :



   (b) Pour tout entier naturel n non nul, les évènements G_n et D_n déterminent une partition de l'univers, donc, d'après la loi des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} g_{n+1} = \mathbf{P}(G_{n+1}) &= \mathbf{P}(G_n \cap G_{n+1}) + \mathbf{P}(D_n \cap G_{n+1}) \\ &= g_n \times 0{,}7 + (1 - g_n) \times 0{,}2 \\ &= 0{,}7g_n + 0{,}2 - 0{,}2g_n \\ &= 0{,}5g_n + 0{,}2 \end{aligned}$$

   On arrive bien au résultat annoncé.

5. (a) Soit n un entier non nul.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= g_{n+1} - 0{,}4 \quad \text{par définition de la suite } (v_n) \\ &= 0{,}5g_n + 0{,}2 - 0{,}4 \quad \text{par définition de la suite } (g_n) \\ &= 0{,}5(v_n + 0{,}4) - 0{,}2 \quad \text{car } v_n = g_n - 0{,}4 \iff g_n = v_n + 0{,}4 \\ &= 0{,}5v_n + 0{,}2 - 0{,}2 \\ &= 0{,}5v_n \end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 0{,}5$ et de premier terme $v_1 = g_1 - 0{,}4 = 0{,}5 - 0{,}4 = 0{,}1$

(b) On peut donc en déduire que pour tout entier naturel n non nul :
$v_n = v_1 \times q^{n-1} = 0{,}1 \times 0{,}5^{n-1}$
Or pour tout entier naturel n non nul $\quad g_n = v_n + 0{,}4 \quad$ donc $\quad g_n = 0{,}1 \times 0{,}5^{n-1} + 0{,}4$.

6. Soit n un entier naturel non nul.

$$\begin{aligned} g_{n+1} - g_n &= 0{,}1 \times 0{,}5^n + 0{,}4 - 0{,}1 \times 0{,}5^{n-1} - 0{,}4 \\ &= 0{,}1 \times 0{,}5^{n-1} \times (0{,}5 - 1) \\ &= 0{,}1 \times 0{,}5^{n-1} \times (-0{,}5) \\ &= -0{,}1 \times 0{,}5^n \end{aligned}$$

or $0{,}5 > 0$ et $0{,}1 > 0$ donc $g_{n+1} - g_n < 0 \iff g_{n+1} < g_n$
La suite (g_n) est strictement décroissante.

7. $-1 < 0{,}5 < 1$, donc on en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} (0{,}5)^n = 0$, donc, par limite du produit et de la somme : $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}1 \times 0{,}5^{n-1} + 0{,}4 = 0{,}4$.
Sur le long terme, Léa gagnera son match dans 40 % des cas.

8. La calculatrice donne $n = 8$.

9. Le programme complété est :

```
def seuil(e):
  g = 0.5
  n = 1
  while g > 0.4 + e :
    g = 0.5 * g + 0.2
    n = n + 1
  return(n)
```

Exercice 9

$\mathbf{E}(X) = 0{,}2 \times (-3) + 0{,}3 \times 1 + 0{,}5 \times 4 = 1{,}7$.
Pour calculer $\mathbf{V}(X)$, on ajoute une ligne $x_i - \mathbf{E}(X)$ au tableau :

x_i	-3	1	4
$\mathbf{P}(X = x_i)$	0,2	0,3	0,5
$x_i - \mathbf{E}(X)$	$-4{,}7$	$-0{,}7$	2,3

$\mathbf{V}(X) = 0{,}2 \times (-4{,}7)^2 + 0{,}3 \times (-0{,}7)^2 + 0{,}5 \times 2{,}3^2 = 7{,}21$.
$\sigma(X) = \sqrt{\mathbf{V}(X)} = \sqrt{7{,}21} \simeq 2{,}69$.

Exercice 10

La somme des probabilités est égale à 1 donc $a + 0{,}1 + 0{,}4 + 0{,}3 = 1$ donc $a = 0{,}2$.
$\mathbf{E}(X) = 0{,}2 \times (-2) + 0{,}1 \times 2 + 0{,}4 \times 4 + 0{,}3 \times 10 = 4{,}4$.
Pour calculer $\mathbf{V}(X)$, on ajoute une ligne $x_i - \mathbf{E}(X)$ au tableau :

x_i	-2	2	4	10
$\mathbf{P}(X = x_i)$	0,2	0,1	0,4	0,3
$x_i - \mathbf{E}(X)$	$-6{,}4$	$-2{,}4$	$-0{,}4$	5,6

$\mathbf{V}(X) = 0{,}2 \times (-6{,}4)^2 + 0{,}1 \times (-2{,}4)^2 + 0{,}4 \times (-0{,}4)^2 + 0{,}3 \times 5{,}6^2 = 18{,}24$.
$\sigma(X) = \sqrt{\mathbf{V}(X)} = \sqrt{18{,}24} \simeq 4{,}27$.

Exercice 11

1. Commençons par compter le nombre de points obtenus pour chacune des 20 faces du dé :

Face	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
Pair ?		2		2		2		2		2		2		2		2		2		2
Premier ?		3	3		3		3				3		3				3		3	
Multiple de 5 ?					5					5					5					5
Carré parfait ?	7			7					7							7				
Total	**7**	**5**	**3**	**9**	**8**	**2**	**3**	**2**	**7**	**7**	**3**	**2**	**3**	**2**	**5**	**9**	**3**	**2**	**3**	**7**

x peut donc prendre donc les valeurs 2, 3, 5, 7, 8 et 9. En associant à chaque valeur sa probabilité, on détermine la loi de probabilité de X :

x_i	2	3	5	7	8	9
p_i	$\frac{5}{20} = 0{,}25$	$\frac{6}{20} = 0{,}3$	$\frac{2}{20} = 0{,}1$	$\frac{4}{20} = 0{,}2$	$\frac{1}{20} = 0{,}05$	$\frac{2}{20} = 0{,}1$
$x_i - \mathbf{E}(X)$	-2,6	-1,6	0,4	2,4	3,4	4,4

(la ligne $x_i - \mathbf{E}(X)$ est obtenue après avoir répondu à la question 3)

2. $\mathbf{P}(X \leq 5) = \mathbf{P}(X = 2) + \mathbf{P}(X = 3) + \mathbf{P}(X = 5) = 0{,}25 + 0{,}3 + 0{,}1 = 0{,}65$
   $\mathbf{P}(3 \leq X \leq 7) = \mathbf{P}(X = 3) + \mathbf{P}(X = 5) + \mathbf{P}(X = 7) = 0{,}3 + 0{,}1 + 0{,}2 = 0{,}6$
   $\mathbf{P}(X > 7) = \mathbf{P}(X = 8) + \mathbf{P}(X = 9) = 0{,}05 + 0{,}1 = 0{,}15$
3. $\mathbf{E}(X) = 0{,}25 \times 2 + 0{,}3 \times 3 + 0{,}1 \times 5 + 0{,}2 \times 7 + 0{,}05 \times 8 + 0{,}1 \times 9 = 4{,}6$.
   En moyenne, on obtient 4,6 pts par lancer.
4. $\mathbf{V}(X) = 0{,}25 \times (-2{,}6)^2 + 0{,}3 \times (-1{,}6)^2 + 0{,}1 \times 0{,}4^2 + 0{,}2 \times 2{,}4^2 + 0{,}05 \times 3{,}4^2 + 0{,}1 \times 4{,}4^2 = 6{,}14$
   $\sigma(X) = \sqrt{\mathbf{V}(X)} = \sqrt{6{,}14} \simeq 2{,}48$.

Exercice 12

1. On peut par exemple étudier tous les cas possibles avec un tableau à double entrée où on note le résultat de la soustraction :

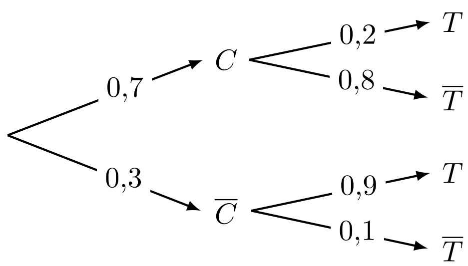
	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

Parmi les 36 issues de l'expérience aléatoire, 24 donnent un résultat inférieur strictement à 3 et font perdre la mise au joueur. Puisque toutes les issues sont équiprobables, la probabilité que le joueur perde sa mise est égale à $\frac{24}{36} = \frac{2}{3}$.

2. C'est la probabilité de l'évènement contraire à celui considéré dans la question précédente donc elle est égale à $1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.
3. Notons X la variable aléatoire qui à chaque partie associe le gain algébrique du joueur. X peut prendre deux valeurs : -5 si le résultat du lancer de dés est inférieur strictement à 3 et $n-5$ sinon. Le jeu est avantageux pour le casino tant que $\mathbf{E}(X) < 0$. Or $\mathbf{E}(X) = \frac{2}{3} \times (-5) + \frac{1}{3} \times (n-5) = \frac{n}{3} - 5$ donc $\mathbf{E}(X) < 0$ si et seulement si $n < 15$. En conclusion, la plus grande valeur entière possible pour n est 14 afin que le jeu reste avantageux pour le casino.

Exercice 13

1. (a) On obtient l'arbre suivant :



(b) On cherche donc $\mathbf{P}(T \cap C)$. On a $\mathbf{P}(T \cap C) = \mathbf{P}(C)\mathbf{P}_C(T) = 0{,}7 \times 0{,}2 = 0{,}14$.

(c) On cherche donc $\mathbf{P}(T)$. L'évènement C et son contraire $\overline{C}$ formant une partition de l'univers, la formule des probabilités totales donne :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(T) &= \mathbf{P}(T \cap C) + \mathbf{P}(T \cap \overline{C}) \\ &= 0{,}14 + \mathbf{P}(\overline{C})\mathbf{P}_{\overline{C}}(T) \\ &= 0{,}14 + 0{,}3 \times 0{,}9 = 0{,}41\end{aligned}$$

La probabilité que le terrain soit occupé est donc de 41%.

(d) On cherche $\mathbf{P}_T(\overline{C})$. Par définition :

$$\mathbf{P}_T(\overline{C}) = \frac{\mathbf{P}(T \cap \overline{C})}{\mathbf{P}(T)} = \frac{\mathbf{P}_{\overline{C}}(T)\mathbf{P}(\overline{C})}{\mathbf{P}(T)} = \frac{0{,}9 \times 0{,}3}{0{,}41} = \frac{0{,}27}{0{,}41} = \frac{27}{41}.$$

2. (a) Le terrain ne rapporte de l'argent que s'il est occupé. X prend donc ses valeurs dans l'ensemble $\{0; 6; 10\}$.

(b) Un terrain est vide avec une probabilité de $\mathbf{P}\left(\overline{T}\right) = 1 - 0{,}41 = 0{,}59$. On sait ensuite que

— $\mathbf{P}(T \cap C) = 0{,}14$
— $\mathbf{P}(T \cap \overline{C}) = 0{,}27$

D'où le tableau

x	0	6	10
$\mathbf{P}(X = x)$	0,59	0,14	0,27

(c) D'après le tableau ci-dessus :

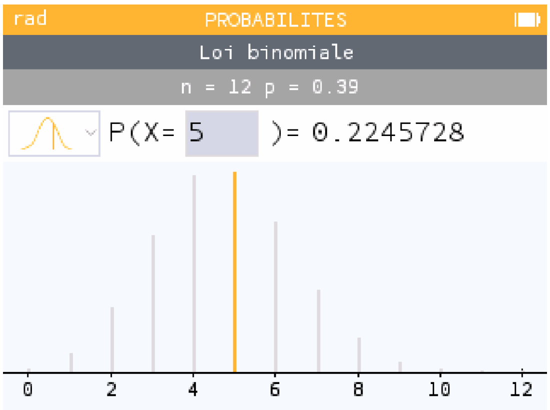
$$\mathbf{E}(X) = 0 \times 0{,}59 + 6 \times 0{,}14 + 10 \times 0{,}27 = 3{,}54$$

(d) D'après ce qui précède, un terrain rapportera $3{,}54 \times 70 = 247{,}8$€ par semaine, en moyenne. 10 terrains en rapporteront donc, toutes choses égales par ailleurs, 2478.

Exercice 14

1. $\mathbf{E}(X) = np = 20 \times 0{,}65 = 13$
2. $\mathbf{V}(X) = np(1-p) = 20 \times 0{,}65 \times 0{,}35 = 4{,}55$
3. $\mathbf{P}(X = 8) \simeq 0{,}014$
4. $\mathbf{P}(X \leq 8) \simeq 0{,}020$
5. $\mathbf{P}(X < 15) = \mathbf{P}(X \leq 14) \simeq 0{,}755$
6. $\mathbf{P}(X \geq 9) = 1 - \mathbf{P}(X < 9) = 1 - \mathbf{P}(X \leq 8) \simeq 0{,}980$
7. $\mathbf{P}(X > 10) = 1 - \mathbf{P}(X \leq 10) \simeq 0{,}878$
8. $\mathbf{P}(7 \leq X \leq 14) = \mathbf{P}(X \leq 14) - \mathbf{P}(X \leq 6) \simeq 0{,}753$
9. $\mathbf{P}_{7 \leq X \leq 14}(X < 15) = \frac{\mathbf{P}((7 \leq X \leq 14) \cap (X < 15))}{\mathbf{P}(7 \leq X \leq 14)} = \frac{\mathbf{P}(7 \leq X \leq 14)}{\mathbf{P}(7 \leq X \leq 14)} = 1$, car $(7 \leq X \leq 14) \subset (X < 15)$
10. $\mathbf{P}_{X<15}(7 \leq X \leq 14) = \frac{\mathbf{P}((7 \leq X \leq 14) \cap (X < 15))}{\mathbf{P}(X<15)} = \frac{\mathbf{P}(7 \leq X \leq 14)}{\mathbf{P}(X \leq 14)} = \frac{\mathbf{P}(X \leq 14) - \mathbf{P}(X \leq 6)}{\mathbf{P}(X \leq 14)} \simeq 0{,}998$
11. $\mathbf{P}_{X \leq 10}(X = 9) = \frac{\mathbf{P}((X \leq 10) \cap (X = 9))}{\mathbf{P}(X \leq 10)} = \frac{\mathbf{P}(X=9)}{\mathbf{P}(X \leq 10)} \simeq 0{,}276$

Exercice 15



Exercice 16

1. Le fait que les feux ne soient pas synchronisés signifie que les 4 évènements « le i-ème feu est rouge » ($1 \leq$i≤ 4) sont indépendants.
2. On a une répétition de 4 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, de succès « le feu est vert » de probabilité $p = 0{,}4$. X suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = 0{,}4$.
3. On s'intéresse ici à $\mathbf{P}(X = 4)$. En utilisant la calculatrice, on obtient $\mathbf{P}(X = 4) = 0{,}0256$.
4. En utilisant la calculatrice, on obtient $\mathbf{P}(X = 1) = 0{,}3456$ et $\mathbf{P}(X = 2) = 0{,}3456$ donc il est aussi probable d'avoir un seul ou deux feux verts sur le trajet.
5. Comme X suit une loi binomiale, son espérance est le produit des paramètres : $\mathbf{E}(X) = np = 4 \times 0{,}4 = 1{,}6$. Amine rencontrera donc, en moyenne, 1,6 feux verts.

Exercice 17

1. On modélise l'attaque normale par une répétition de 5 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, de succès « la face obtenue est supérieure ou égale à 5 » de probabilité $p = \frac{1}{3}$. On appelle X la variable aléatoire comptant le nombre de succès. X suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = \frac{1}{3}$. On s'intéresse ici à $\mathbf{P}(X \geq 3)$. En utilisant la calculatrice, on obtient $\mathbf{P}(X \geq 3) \simeq 0{,}21$.
2. On modélise l'attaque spéciale par une répétition de 2 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, de succès « la face obtenue est un 6 » de probabilité $p = \frac{1}{6}$. On appelle Y la variable aléatoire comptant

le nombre de succès. Y suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 2$ et $p = \dfrac{1}{6}$. On s'intéresse ici à $\mathbf{P}(Y \geq 1)$. En utilisant la calculatrice, on obtient $\mathbf{P}(Y \geq 1) \simeq 0{,}31$.

3. L'attaque la plus efficace est l'attaque spéciale car la probabilité de vaincre le troll est plus grande.

Exercice 18

1. Faux car $\mathbf{P}(X \leq n)$ est toujours égale à 1 (X est à valeurs dans $\{0,\ 1,\ 2,\ ...\ n\}$).
   Et $\mathbf{P}(X = n) = 1$ uniquement si $p = 1$.
2. Vrai car X est à valeurs positives donc $\{X \leq 0\} = \{X = 0\}$.
3. Vrai car $\mathbf{E}(X) = np$.
4. Vrai car $\mathbf{E}(X) = np$.
5. Vrai car $\mathbf{V}(X) = np(1-p)$.
6. Faux car $\mathbf{V}(X) = np(1-p)$ et la fonction $p \mapsto np(1-p)$ n'est pas croissante sur $[\,0\,;\,1\,]$ (elle atteint son maximum en 0,5). Prenons par exemple $n = 10$, $p_1 = 0{,}5$ et $p_2 = 0{,}6$:
   $\mathbf{V}(X_1) = np_1(1-p_1) = 10 \times 0{,}5 \times 0{,}5 = 2{,}5$ et $\mathbf{V}(X_2) = np_2(1-p_2) = 10 \times 0{,}6 \times 0{,}4 = 2{,}4$.

Exercice 19

1. Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de passagers se présentant à l'embarquement. D'après les données de l'énoncé, X suit la loi binomiale de paramètres $n = 125$ et $p = 0{,}9$.
   La probabilité que tous les passagers qui se présentent à l'embarquement puissent monter à bord est égale à $\mathbf{P}(X \leq 120) \simeq 0{,}996$.
2. La probabilité qu'il reste au moins une place libre à bord est égale à $\mathbf{P}(X \leq 119) \simeq 0{,}989$.
3. $\mathbf{E}(X) = np = 125 \times 0{,}9 = 112{,}5$. En moyenne, 112,5 passagers se présentent à l'embarquement.
4. On souhaite déterminer la valeur de n la plus élevée possible vérifiant $\mathbf{P}(X \geq 121) \leq 0{,}05$.
   On résout cette équation à tâtons à l'aide de la calculatrice.
   Pour $n = 127$ on obtient $\mathbf{P}(X \geq 121) \simeq 0{,}025$ et pour $n = 128$ on obtient $\mathbf{P}(X \geq 121) \simeq 0{,}051$. Ainsi, la compagnie doit vendre au maximum 127 billets.

Exercice 20

1. On cherche $\mathbf{P}(X \geq 1)$. Comme $\mathbf{P}(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$, une calculatrice donne, au centième près :
   $$\mathbf{P}(X \geq 1) \approx 0{,}98.$$
2. On cherche n tel que $\mathbf{P}(X \geq 1) \geq 0{,}999$. Comme $\mathbf{P}(X \geq 1) = 1 - \mathbf{P}(X = 0)$, on peut reformuler le problème en cherchant n tel que $\mathbf{P}(X = 0) \leq 0{,}001$. On sait de plus que $\mathbf{P}(X = 0) = \binom{n}{0}p^0(1-p)^{n-0} = (1-p)^n = 0{,}68^n$. Une calculatrice montre alors que $n = 17$ convient : $0{,}68^{17} \approx 0{,}657 \times 10^{-3}$. Il faut donc rencontrer (au moins) 17 élèves.

Exercice 21

X est à valeurs dans $\{0,\ 1,\ 2,\ ...\ 6\}$ donc $n = 6$.
Plusieurs méthodes sont possibles pour déterminer p :

— $\mathbf{P}(X = 6) = \binom{6}{6}p^6(1-p)^0 = p^6$ car il n'y a qu'un seul chemin réalisant 6 succès dans un arbre représentant un schéma de Bernoulli à 6 niveaux.
Or $\mathbf{P}(X = 6) = \dfrac{729}{15625}$ donc $p = \left(\dfrac{729}{15625}\right)^{1/6} = 0{,}6$.

— $\mathbf{P}(X = 0) = \binom{6}{0}p^0(1-p)^6 = (1-p)^6$ car il n'y a qu'un seul chemin réalisant 0 succès dans un arbre représentant un schéma de Bernoulli à 6 niveaux.
Or $\mathbf{P}(X = 0) = \dfrac{64}{15625}$ donc $1 - p = \left(\dfrac{64}{15625}\right)^{1/6} = 0{,}4$ donc $p = 0{,}6$.

— $\mathbf{E}(X) = \cdots = 3{,}6$. Or $\mathbf{E}(X) = np = 6p$ donc $p = 0{,}6$. *(attention, cette méthode semble plus rapide mais le calcul de l'espérance peut être fastidieux et source d'erreur)*

Exercice 22

1. Supposons que X suit une loi binomiale de paramètres n et p.
   Alors $\mathbf{E}(X) = np$ et $\mathbf{V}(X) = np(1-p)$. $\mathbf{E}(X) \neq 0$ donc $\dfrac{\mathbf{V}(X)}{\mathbf{E}(X)} = \dfrac{np(1-p)}{np} = 1 - p$.
   Or $\dfrac{\mathbf{V}(X)}{\mathbf{E}(X)} = \dfrac{3{,}84}{19{,}2} = 0{,}2$ donc $p = 0{,}8$. Puis $n = \dfrac{\mathbf{E}(X)}{p} = \dfrac{19{,}2}{0{,}8} = 24$.
   On a $0 \leq p \leq 1$ et $n \in \mathbf{N}$ donc X peut suivre la loi binomiale de paramètres $n = 24$ et $p = 0{,}8$.
2. Supposons que X suit une loi binomiale de paramètres n et p. $\mathbf{E}(X) \neq 0$ donc $\dfrac{\mathbf{V}(X)}{\mathbf{E}(X)} = 1 - p$.
   Or $\dfrac{\mathbf{V}(X)}{\mathbf{E}(X)} = \dfrac{13{,}104}{18{,}72} = 0{,}7$ donc $p = 0{,}3$. Puis $n = \dfrac{\mathbf{E}(X)}{p} = \dfrac{18{,}72}{0{,}3} = 62{,}4$.
   On a $n \notin \mathbf{N}$ donc X ne peut pas suivre de loi binomiale.

Exercice 23 (algorithmique : méthode de Monte Carlo)

1. (a) Quelles conditions vérifient les coordonnées $(x; y)$ d'un point M situé :
   — Dans le carré $OABC$: $\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$
   — Dans le domaine hachuré : $\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq x^2 \end{cases}$
   (b) random() renvoie un réel au hasard dans l'intervalle $[0; 1[$. Ainsi, ces deux lignes permettent de choisir un point au hasard dans le carré $OABC$.
   (c) Cette ligne teste si le point appartient au domaine hachuré.
   (d) La variable C compte le nombre de points appartenant au domaine hachuré.
   (e) Cette ligne calcule la fréquence d'apparition du point dans le domaine hachuré.
   (f) La valeur renvoyée par la fonction approche la proportion du domaine hachuré par rapport au carré $OABC$. L'aire du carré étant égale à 1, on en déduit que le domaine hachuré a une aire proche de 0,3257.
2. POUR ALLER PLUS LOIN
   (a) La ligne 7 du programme ci-dessous calcule la distance r entre le point $(0{,}5; 0{,}5)$ et le point $(x; y)$.

```python
from random import *

def Aire():
    C=0
    for i in range(10000):
        x=random()
        y=random()
        r=((x-0.5)**2+(y-0.5)**2)**0.5
        if r<=0.5:
            C=C+1
    F=C/10000
    return F
```

(b) Executer `Aire()` donne `0.7805`.

(c) Le domaine hachuré a une aire proche de 0,7805. Le domaine étant un disque de rayon $r = 0{,}5$ (et de centre $\Omega(0{,}5; 0{,}5)$), son aire est égale à $\pi r^2 = 0{,}25\pi$. Ainsi π vaut approximativement $4 \times 0{,}7805 = 3{,}122$.