Exercice n°1 :

Déterminer la limite des suites ci-dessous, définies pour tout entier naturel n non nul par les expressions suivantes :

1. $u_n = -n^2 - 3n + 5$
2. $v_n = n^3\left(2 + \frac{3}{n^2}\right)$
3. $w_n = (3 - 5n)(n^3 - 4)$
4. $x_n = \sqrt{n}(n^2 + 2n)$

Exercice n°2 :

Déterminer la limite des suites ci-dessous, définies pour tout entier naturel n non nul par les expressions suivantes :

1. $u_n = \frac{2n+4}{\frac{1}{n}-5}$
2. $v_n = \frac{-3}{2n^2+n+1}$
3. $w_n = \frac{2-\frac{1}{n^2}}{7+\frac{1}{n\sqrt{n}}}$
4. $x_n = \frac{-4}{\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n}}$

Exercice n°3 :

On considère la suite (u_n), définie pour tout entier naturel n par

$$u_n = 3n^2 - 8n + 2.$$

1. **a.** Sans transformer u_n, expliquer pourquoi le calcul de la limite de (u_n) donne une forme indéterminée.
   b. Factoriser $3n^2 - 8n + 2$ par son terme de plus haut degré c'est-à-dire $3n^2$. En déduire la limite de (u_n).
2. En utilisant la même méthode, calculer les limites des suites (v_n), (w_n) et (x_n) définies pour tout entier naturel par :
   a. $x_n = -2n^2 + 4n - 5$
   b. $w_n = 5n^3 - 3n^2 - 7n + 9$
   c. $x_n = \sqrt{n} - n.$

Exercice n°4 :

On considère la suite (u_n), définie pour tout entier naturel n par $u_n = \frac{2n-4}{n^2+1}$.

1. **a.** Sans transformer u_n, expliquer pourquoi le calcul de la limite de (u_n) donne une forme indéterminée.
   b. Factoriser le numérateur et le dénominateur par leur plus grande puissance de n et montrer que $u_n = \frac{2-\frac{4}{n}}{1+\frac{1}{n^2}}$.
   c. En déduire la limite de (u_n).

2. En utilisant la même méthode, calculer les limites des suites (v_n) et (w_n) définies pour tout entier naturel par :
   a. $u_n = \frac{2-5n}{4n+7}$
   b. $v_n = \frac{-n^3-10n+4}{2n^2+3n+1}$

Exercice n°5 :

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par : $u_n = \frac{n+1}{n+2}$.

1. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.
2. Prouver que, pour tout entier naturel n, $u_n < 1$.
3. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n+2}{u_n-1}$.

Exercice n°6 :

Calculer les limites des suites (u_n) ci-dessous définies pour tout entier naturel n par les expressions suivantes :

1. $u_n = -3 \times \left(-\frac{1}{4}\right)^n$
2. $u_n = 1 + 2 \times 0{,}99^n$
3. $u_n = 5 \times 1{,}99^n - 12$
4. $u_n = 8 - \sqrt{3} \times 2^n$
5. $u_n = \left(\frac{12}{17}\right)^n$
6. $u_n = \frac{2\times 4^n}{5^n}$
7. $u_n = \frac{(-1)^n}{4\times(-0{,}1)^n}$
8. $u_n = \frac{2^{3n}}{3^{2n}}$

Exercice n°7 :

Calculer les limites des suites (u_n) ci-dessous définies pour tout entier naturel n par les expressions suivantes :

1. $u_n = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}$ **2.** $u_n = 1 + \frac{1-(\sqrt{2})^n}{1-\sqrt{3}}$

3. $u_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^n}$ **4.** $u_n = 1 + 2 + 4 + \cdots + 2^n$

Exercice n°8 :

Calculer les limites des suites (u_n) ci-dessous définies pour tout entier naturel n non nul par les expressions suivantes :

1. $u_n = \sqrt{n} + n^2$ **2.** $u_n = n^6 - n^4 + n^2 - n$

3. $u_n = -4 + \left(\frac{7}{10}\right)^n + n^5$ **4.** $u_n = \frac{1}{n^2}(3n^2 + 4)$

5. $u_n = (n^5 + 4)(n - 3)$ **6.** $u_n = \frac{1}{n^3}(3n^2 + 4)$

7. $u_n = (8n - 2)\left(3 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ **8.** $u_n = \frac{2}{n^2-4}$

9. $u_n = \frac{n^2-1}{n+1}$ **10.** $u_n = \frac{-6n^2+3}{-n-2n^2}$

11. $u_n = \frac{4-\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{n^3}-6}$ **12.** $u_n = \frac{\left(\frac{7}{5}\right)^n}{\left(\frac{4}{3}\right)^n}$.

Exercice n°9 :

On considère une suite de réels.

1. Associer une phrase de chaque colonne de manière à obtenir une proposition vraie :

Si…	et si …	alors…
• La suite est majorée • La suite est minorée • La suite n'est pas majorée • La suite n'est pas minorée	• la suite est croissante • la suite est décroissante	• la suite diverge • la suite converge

2. Combien de propositions vraies peut-on ainsi former au maximum ?

Exercice n°10 :

On considère une suite (u_n) telle que, pour tout entier naturel n, on a :

$$4 \leq u_{n+1} \leq u_n.$$

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

1. La suite (u_n) est monotone.
2. La suite (u_n) est croissante.
3. La suite (u_n) admet un majorant.
4. La suite (u_n) est minorée.
5. La suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

Exercice n°11 :

On sait que les termes d'une suite (u_n) sont strictement positifs.

Parmi les propriétés suivantes, la ou lesquelles permettent de conclure que (u_n) converge ?

1. (u_n) est croissante.
2. (u_n) est décroissante.
3. (u_n) est bornée.

Exercice n°12 :

Dans chacun des cas suivants, indiquer si les informations données sur la suite (v_n) permettent de conclure sur :

- l'existence d'une limite :
- l'existence et la valeur de la limite.

1. La suite (v_n) est géométrique de raison $-\frac{3}{5}$ et de premier terme égal à 2.
2. La suite (v_n) est croissante et majorée par 2.
3. Pour tout $n \geq 101$: $u_n \geq v_n \geq w_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 5$.
4. La suite (v_n) est décroissante et non minorée.

Exercice n°13 :

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2 \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Prouver par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \geq 4$.
2. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{2}u_n + 2.$$
3. Conclure sur le sens de variations de la suite.
4. La suite (u_n) est-elle convergente ?

Exercice n°14 :

On considère la suite (t_n) définie par :

$$\begin{cases} t_0 = 5 \\ t_{n+1} = t_n - 5n - 4 \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 2$, $t_n \leq -n^2$.
2. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n$.

Exercice n°15 :

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 0{,}59^n(5 + (-1)^n)$.

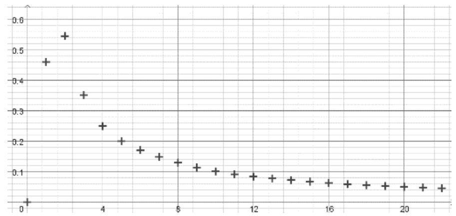
1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que $4 \times 0{,}59^n \leq u_n \leq 4 \times 0{,}59^n$.
2. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice n°16 :

Soit (k_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $k_n = \frac{n^2+\sin(n)}{n^3-2n+5}$.

On admet que $n^3 - 2n + 5 > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Les premiers termes de la suite (k_n) sont représentés ci-contre. Conjecturer la limite de la suite (k_n) quand n tend vers $+\infty$.



2. Montrer que, pour tout en tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\frac{n^2-1}{n^3-2n+5} \leq k_n \leq \frac{n^2+1}{n^3-2n+5}$.
3. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2-1}{n^3-2n+5}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2+1}{n^3-2n+5}$ puis en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} k_n$.

Exercice n°17 :

On considère une suite (u_n) telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}$$

1. Justifier que pour tout entier naturel n :
$$\frac{n^2}{n^2+n} \leq u_n \leq \frac{n^2}{n^2+1}$$
2. Justifier que la suite (u_n) converge et donner la valeur de sa limite.

<u>Exercice n°18</u> :

Une biologiste souhaite étudier l'évolution de la population d'une espèce animale dans une réserve. Cette population est estimée à 12 000 individus en 2020. Les contraintes du milieu naturel font que la population ne peut pas dépasser les 60 000 individus.

Partie A : Un premier modèle

Dans une première approche, la biologiste estime que la population croît de 5% par an. L'évolution annuelle de la population est ainsi modélisée par une suite (v_n), où v_n représente le nombre d'individus, exprimé en millier, l'année $(2020 + n)$.

On a donc $v_0 = 12$.

1. Déterminer la nature de la suite (v_n) et donner l'expression de v_n en fonction de n.
2. Ce modèle répond-il aux contraintes du milieu naturel ?

Partie B : un second modèle

La biologiste modélise ensuite l'évolution annuelle de la population par une suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 = 12 \\ u_{n+1} = \dfrac{-1{,}1}{605}(u_n)^2 + 1{,}1u_n \end{cases} \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \frac{-1{,}1}{605}x^2 + 1{,}1x$. On a ainsi $u_{n+1} = g(u_n)$.
   a. Justifier que g est croissante sur $[0\,;60]$.
   b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $g(x) = x$.

2. **a.** Calculer la valeur arrondir à 10^{-3} près de u_1. Interpréter.

   b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n \leq 55$.

   c. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

   d. En déduire la convergence de la suite (u_n).
   e. On admet que la limite l de la suite vérifie $g(l) = l$. En déduire sa valeur et l'interpréter dans le contexte de l'exercice.

3. La biologiste souhaite déterminer le nombre d'années au bout duquel la population dépassera les 50 000 individus avec ce second modèle.

   Compléter le programme ci-contre afin que la valeur renvoyée réponde à sa question.

```
def seuil():
    u=12
    n=0
    while ... :
        u= ...
        n=...
    return u
```

<u>Exercice n°19</u> : *(extrait du sujet de Centres étrangers juin 2024 J2)*

Partie A :

On considère la fonction f définue sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x+1}$.

On admet que cette fonction est dérivable sur ce même intervalle.

1. Montrer que la fonction f est croissante sur $[0\,;+\infty[$.
2. Démontrer que pour tout réel x appartenant à $[0\,;+\infty[$,
$$f(x) - x = \frac{-x^2 + x + 1}{\sqrt{x+1} + x}$$
3. En déduire que sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$, l'équation $f(x) = x$ admet pour unique solution $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Partie B :

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et pour tout entier naturel n, par $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction étudiée dans la partie A.
On admet que la suite de terme général u_n est bien définie pour tout entier naturel n.

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a
$$1 \leq u_{n+1} \leq u_n.$$
2. En déduire que la suite (u_n) converge.

3. On admet que la limite l de la suite (u_n) vérifie $l = f(l)$. Quelle est la valeur de l ?
4. On considère le script Python ci-contre :

On rappelle que la commande abs(x) renvoie la valeur absolue de x.

```
from math import *
def seuil(n):
    u=5
    i=0
    ℓ =(1 + sqrt(5))/2
    while abs(u-ℓ)>=10**(-n):
        u=sqrt(u+1)
        i=i+1
    return(i)
```

   a. Donner la valeur renvoyée par seuil (2).
   b. La valeur renvoyée par seuil (4) est 9. Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice

Exercice n°20 :

Un apiculteur étudie l'évolution de sa population d'abeilles. Au début de son étude, il évalue à 10 000 le nombre de ses abeilles.

Chaque année, l'apiculteur observe qu'il perd 20% des abeilles de l'année précédente. Il achète un nombre identique de nouvelles abeilles chaque année. On notera c ce nombre, exprimé en dizaine de milliers.

On note u_0 le nombre d'abeilles, en dizaine de milliers, de cet apiculteur au début de l'étude.

Pour tout entier naturel n non nul, u_n désigne le nombre d'abeilles en dizaine de milliers, au bout de la n-ième année.
Ainsi, on a

- $u_0 = 1$;
- Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}8u_n + c$.

Partie A :

On suppose, dans cette partie seulement, que $c = 1$.

1. Conjecturer la monotonie de la suite (u_n).
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n,
$$u_n = 5 - 4 \times 0{,}8^n.$$
3. En justifiant la réponse, vérifier les deux conjectures établies à la question 1. Interpréter ces deux résultats.

Partie B :

L'apiculteur souhaite que le nombre d'abeilles tende vers 100 000. On cherche à déterminer la valeur de c qui permet d'atteindre cet objectif.

On définit la suite (v_n), pour tout entier naturel n, par : $v_n = u_n - 5c$.

1. Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
2. En déduire l'expression du terme général de la suite (v_n) en fonction de n.
3. Déterminer la valeur de c pour que l'apiculteur atteigne son objectif.

Pour aller plus loin ….

Exercice n°21 :

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

1. Si (u_n) est une suite bornée, alors elle converge.
2. Si (v_n) est une suite convergente, alors elle est bornée.
3. Si (w_n) est une suite croissante et majorée par M, alors elle converge vers M.
4. Si (u_n) n'est pas majorée alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
5. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ alors (v_n) n'est pas majorée.
6. Si (w_n) est une suite strictement croissante alors $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = +\infty$.
7. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = +\infty$ alors (t_n) est croissante.

Exercice n°22 :

On considère les suites (u_n) et (w_n) définies par $u_0 = 7$, $w_0 = 17$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + w_n}{2} \quad \text{et} \quad w_{n+1} = \sqrt{\frac{(u_n)^2 + (w_n)^2}{2}}$$

1. Calculer u_1 et w_1.
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n > 0$ et $w_n > 0$.
3. **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a :
$$w_{n+1} - u_{n+1} = \left(\frac{u_n - w_n}{2}\right)^2.$$
   b. En déduire que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \leq w_n$.
4. **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - u_n = \frac{w_n - u_n}{2}$
   b. En déduire que la suite (u_n) est croissante.
5. **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a :
$$(w_{n+1})^2 - (u_{n+1})^2 = \frac{(u_n)^2 - (w_n)^2}{2}.$$
   b. En déduire que la suite (w_n) est décroissante.
6. Démontrer que les suites (u_n) et (w_n) sont convergentes.

Exercice n°23 :

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{n^3}$$

1. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
2. **a.** Pour tout entier naturel $n \geq 1$, démontrer que, $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$ puis que $-\frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^3} \leq -\frac{1}{n+1}$.
   b. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a $u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$.
3. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

Histoire des maths : La limite de cette suite est appelée la constante d'Apéry et vaut environ 1,202 056 90. Elle doit son nom au mathématicien français Roger Apéry qui a prouvé en 1978 que ce nombre est irrationnel, deux ans après la publication d'un manifeste, *Mathématiques constructives,* défendant une philosophie originale des mathématiques. Apéry était également engagé politiquement.