Exercice 1

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} -n^2 = -\infty$ par produit ; $\lim\limits_{n\to+\infty} -3n = -\infty$ par produit et $\lim\limits_{n\to+\infty} 5 = 5$.
Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ par somme.

2. $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3 = +\infty$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3}{n^2} = 0$ par quotient d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} 2 + \dfrac{3}{n^2} = 2$ par somme.
Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ par produit.

3. $\lim\limits_{n\to+\infty} 3 - 5n = -\infty$ par produit et somme et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3 - 4 = +\infty$ par somme.
Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = -\infty$ par produit.

4. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$; $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n = +\infty$ par produit donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 + 2n = +\infty$ par somme.
Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ par produit.

Exercice 2

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n + 4 = +\infty$ par produit et somme et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} - 5 = -5$ par somme.
Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ par quotient.

2. $\lim\limits_{n\to+\infty} -3 = -3$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n^2 + n + 1 = +\infty$ par somme.
Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ par quotient.

3. $\lim\limits_{n\to+\infty} 2 - \dfrac{1}{n^2} = 2$ par somme et $\lim\limits_{n\to+\infty} 7 + \dfrac{1}{n\sqrt{n}} = 7$ par produit, quotient et somme.
Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \dfrac{2}{7}$ par quotient.

4. $\lim\limits_{n\to+\infty} -4 = -4$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{n^2} + \dfrac{3}{n} = 0^+$ par somme.
Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = -\infty$ par quotient.

Exercice 3

1. **a.** $\lim\limits_{n\to+\infty} 3n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} -8n = -\infty$. La somme de ces deux limites est un cas de forme indéterminée.

b. $u_n = 3n^2\left(1 - \dfrac{8}{3n} + \dfrac{2}{3n^2}\right)$.
$\lim\limits_{n\to+\infty} 3n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \dfrac{8}{3n} + \dfrac{2}{3n^2} = 1$ par somme.
Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ par produit.

2. **a.** $v_n = -2n^2\left(1 - \dfrac{2}{n} + \dfrac{5}{2n^2}\right)$.
$\lim\limits_{n\to+\infty} -2n^2 = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \dfrac{2}{n} + \dfrac{5}{2n^2} = 1$ par somme.
Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ par produit.

b. $w_n = 5n^3\left(1 - \dfrac{3}{5n} - \dfrac{7}{5n^2} + \dfrac{9}{5n^3}\right)$.
$\lim\limits_{n\to+\infty} 5n^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \dfrac{3}{5n} - \dfrac{7}{5n^2} + \dfrac{9}{5n^3} = 1$ par somme.
Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = +\infty$ par produit.

c. $\sqrt{n} = n^{\frac{1}{2}}$ donc le terme de plus haut degré est $-n$.
$x_n = -n + \sqrt{n} = -n\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$.
$\lim\limits_{n\to+\infty} -n = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 1$ par somme.
Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = -\infty$ par produit.

Exercice 4

1. **a.** $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n-4=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2+1=+\infty$. Le quotient de ces deux limites est un cas de forme indéterminée.

b. $u_n=\dfrac{n\left(2-\frac{4}{n}\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}=\dfrac{1}{n}\times\dfrac{2-\frac{4}{n}}{1+\frac{1}{n^2}}$.

c. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2-\frac{4}{n}}{1+\frac{1}{n^2}}=2$ par somme et quotient ; ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$ par produit.

2. **a.** $v_n=\dfrac{n\left(-5+\frac{2}{n}\right)}{n\left(4+\frac{7}{n}\right)}=\dfrac{-5+\frac{2}{n}}{4+\frac{7}{n}}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} -5+\dfrac{2}{n}=-5$ par somme et $\lim\limits_{n\to+\infty} 4+\dfrac{7}{n}=4$ par somme ; ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=-\dfrac{5}{4}$ par quotient.

b. $w_n=\dfrac{n^3\left(-1-\frac{10}{n^2}+\frac{4}{n^3}\right)}{n^2\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}=n\times\dfrac{-1-\frac{10}{n^2}+\frac{4}{n^3}}{2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} n=+\infty$; $\lim\limits_{n\to+\infty} -1-\frac{10}{n^2}+\frac{4}{n^3}=-1$ par somme ; $\lim\limits_{n\to+\infty} 2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}=2$ par somme ;

ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{-1-\frac{10}{n^2}+\frac{4}{n^3}}{2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}=-\dfrac{1}{2}$ par quotient. Finalement $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n=-\infty$ par produit.

Exercice 5

1. $u_n=\dfrac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n\left(1+\frac{2}{n}\right)}=\dfrac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\frac{1}{n}=1$ par somme et $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\frac{2}{n}=1$ par somme donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=1$ par quotient.

2. $u_n=\dfrac{n+2-1}{n+2}=\dfrac{n+2}{n+2}-\dfrac{1}{n+2}=1-\dfrac{1}{n+2}$. Or pour tout $n\in\mathbb{N}$, $n+2>0$ donc $\dfrac{1}{n+2}>0$ donc $-\dfrac{1}{n+2}<0$ donc $1-\dfrac{1}{n+2}<1$, c'est-à-dire $u_n<1$.

3. D'après la question **1.**, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n+2=3$ par somme ; $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n-1=0^-$ par somme et d'après la question **2.** ($u_n<1$ donc $u_n-1<0$). Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n+2}{u_n-1}=-\infty$ par quotient.

Exercice 6

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{4}\right)^n=0$ car $-1<-\dfrac{1}{4}<1$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$ par produit.

2. $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}99^n=0$ car $-1<0{,}99<1$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=1$ par produit et somme.

3. $\lim\limits_{n\to+\infty} 1{,}99^n=+\infty$ car $1{,}99>1$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$ par produit et somme.

4. $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n=+\infty$ car $2>1$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=-\infty$ par produit et somme.

5. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$ car $-1<\dfrac{12}{17}<1$.

6. $u_n=2\times\left(\dfrac{4}{5}\right)^n$. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{4}{5}\right)^n=0$ car $-1<\dfrac{4}{5}<1$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$ par produit.

7. $u_n=\dfrac{1}{4}\times\left(\dfrac{-1}{-0{,}1}\right)^n=\dfrac{1}{4}\times 10^n$. $\lim\limits_{n\to+\infty} 10^n=+\infty$ car $10>1$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$ par produit.

8. $u_n=\left(\dfrac{2^3}{3^2}\right)^n=\left(\dfrac{8}{9}\right)^n$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$ car $-1<\dfrac{8}{9}<1$.

Exercice 7

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ car $-1 < \frac{1}{2} < 1$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{0{,}5} = 2$ par somme et quotient.
2. $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{2})^n = +\infty$ car $\sqrt{2} > 1$. Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} 1-(\sqrt{2})^n = -\infty$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1-(\sqrt{2})^n}{1-\sqrt{3}} = +\infty$ par quotient et car $1-\sqrt{3} < 0$. Finalement $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ par somme.
3. On reconnaît que u_n est égal à la somme des termes de la suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme 1. On peut écrire $u_n = \sum\limits_{i=0}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^i = \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}\times\left(1-\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ car $-1 < \frac{1}{3} < 1$; ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{3}{2}$ par somme et produit.
4. On reconnaît que u_n est égal à la somme des termes de la suite géométrique de raison 2 et de premier terme 1. On peut écrire $u_n = \sum\limits_{i=0}^{n} 2^i = \frac{1-2^{n+1}}{1-2} = -1\times(1-2\times 2^n) = 2\times 2^n - 1$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$ car $2 > 1$; ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ par produit et somme.

Exercice 8

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n} = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ par somme.
2. On est en présence d'une forme indéterminée « $+\infty-\infty$ », on factorise donc u_n par le terme de plus haut degré : $u_n = n^6\left(1-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}-\frac{1}{n^5}\right)$. $\lim\limits_{n\to+\infty} n^6 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 1-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}-\frac{1}{n^5} = 1$ par somme donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ par produit.
3. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{7}{10}\right)^n = 0$ car $-1 < \frac{7}{10} < 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^5 = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ par somme.
4. On est en présence d'une forme indéterminée « $0\times+\infty$ », on développe donc u_n : $u_n = 3+\frac{4}{n^2}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$ par somme.
5. $\lim\limits_{n\to+\infty} n^5+4 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n-3 = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ par produit.
6. On est en présence d'une forme indéterminée « $0\times+\infty$ », on développe donc u_n : $u_n = \frac{3}{n}+\frac{4}{n^3}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ par somme.
7. $\lim\limits_{n\to+\infty} 8n-2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 3+\frac{1}{\sqrt{n}} = 3$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ par produit.
8. $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2-4 = +\infty$ par somme donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ par quotient.
9. On est en présence d'une forme indéterminée « $\frac{\infty}{\infty}$ ». On pourrait factoriser numérateur et dénominateur par le terme de plus haut degré ... mais il y a plus astucieux ici ! En effet, $n^2-1 = (n-1)(n+1)$ et donc $u_n = n-1$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
10. On est en présence d'une forme indéterminée « $\frac{\infty}{\infty}$ ». On factorise numérateur et dénominateur par le terme de plus haut degré : $u_n = \frac{n^2\left(-6+\frac{3}{n^2}\right)}{n^2\left(-\frac{1}{n}-2\right)} = \frac{-6+\frac{3}{n^2}}{-\frac{1}{n}-2}$. $\lim\limits_{n\to+\infty} -6+\frac{3}{n^2} = -6$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{1}{n}-2 = -2$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{-6}{-2} = 3$ par quotient.
11. $\lim\limits_{n\to+\infty} 4-\frac{1}{\sqrt{n}} = 4$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3}-6 = -6$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{4}{-6} = -\frac{2}{3}$ par quotient.
12. On est en présence d'une forme indéterminée « $\frac{\infty}{\infty}$ » (car $\frac{7}{5} > 1$ et $\frac{4}{3} > 1$). Or $u_n = \left(\frac{7}{5}\right)^n\times\left(\frac{3}{4}\right)^n = \left(\frac{7}{5}\times\frac{3}{4}\right)^n = \left(\frac{21}{20}\right)^n$. Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ car $\frac{21}{20} > 1$.

Exercice 9

Les propositions vraies sont :

— Si la suite est majorée et si la suite est croissante alors la suite converge.

— Si la suite est minorée et si la suite est décroissante alors la suite converge.

— Si la suite n'est pas majorée et si la suite est croissante alors la suite diverge. (vers $+\infty$)

— Si la suite n'est pas minorée et si la suite est décroissante alors la suite diverge. (vers $-\infty$)

Remarque : Toute suite croissante est nécessairement minorée (par son premier terme) et tous les cas peuvent se présenter : convergence, divergence vers $+\infty$, absence de limite. De même, toute suite décroissante est nécessairement majorée et tous les cas peuvent se présenter.

Exercice 10

1. Vrai : (u_n) est décroissante car $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Faux : (u_n) étant décroissante, elle ne pourrait être croissante que dans le cas où (u_n) serait constante.

3. Vrai : toute suite décroissante est majorée par son premier terme (cela se montre aisément par récurrence).

4. Vrai : (u_n) est minorée par 4 car $u_n \geq 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5. Faux : (u_n) est décroissante et minorée donc, d'après le théorème de la limite monotone, (u_n) converge.

Exercice 11

1. On ne peut rien affirmer. La suite $(n+1)$ vérifie les conditions et diverge vers $+\infty$, tandis que la suite $\left(2 - \dfrac{1}{2^n}\right)$ vérifie les conditions et converge vers 2.

2. (u_n) est décroissante et minorée par 0 ($u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$) donc, d'après le théorème de la limite monotone, (u_n) converge.

3. On ne peut rien affirmer. La suite $(2 + (-1)^n)$ est bornée par 1 et 3 et n'admet pas de limite (ses valeurs alternent entre 1 et 3), tandis que la suite $\left(2 - \dfrac{1}{2^n}\right)$ est bornée par 1 et 2 et converge vers 2.

Exercice 12

1. $v_n = 2 \times \left(-\dfrac{3}{5}\right)^n$. $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(-\dfrac{3}{5}\right)^n = 0$ car $-1 < -\dfrac{3}{5} < 1$. Ainsi $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$ donc on peut conclure sur l'existence et la valeur de la limite.

2. On peut conclure sur l'existence de la limite grâce au théorème de la limite monotone. En revanche on ne peut pas connaître la valeur de la limite. En effet les suites $(1 - 0{,}1^n)$ et $(2 - 0{,}1^n)$ sont croissantes et majorées par 2, la première a pour limite 1 et la seconde a pour limite 2.

3. On peut conclure sur l'existence et la valeur de la limite grâce au théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 5$.

4. On peut conclure sur l'existence et la valeur de la limite grâce à la propriété du cours qui affirme que toute suite décroissante non minorée admet pour limite $-\infty$.

Exercice 13

1. — $\mathcal{P}(n)$: « $u_n \geq 4$ ».
- **Initialisation.** $u_0 = 5$ donc $\mathcal{P}(0)$: « $u_0 \geq 4$ » est vraie.
- **Hérédité.** On suppose qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie.
  Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$: « $u_{n+1} \geq 4$ » est vraie également.
  On a, par hypothèse de récurrence, $u_n \geq 4$. Donc $\frac{1}{2}u_n \geq 2$. D'où $\frac{1}{2}u_n + 2 \geq 4$. C'est-à-dire $u_{n+1} \geq 4$.
  Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
- **Conclusion.** Par axiome de récurrence, on a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \geq 4$.

2. $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}u_n + 2 - u_n = -\frac{1}{2}u_n + 2$.

3. D'après la question **1.**, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \geq 4$ donc $-\frac{1}{2}u_n \leq -2$ d'où $-\frac{1}{2}u_n + 2 \leq 0$, c'est-à-dire $u_{n+1} - u_n \leq 0$.
On en déduit que la suite (u_n) est décroissante.

4. La suite (u_n) est décroissante (question **3.**) et minorée par 4 (question **1.**) donc, d'après le théorème de la limite monotone, elle est convergente.

Exercice 14

1. — $\mathcal{P}(n)$: « $t_n \leq -n^2$ ».
- **Initialisation.** $t_1 = 5 - 0 - 4 = 1$; $t_2 = 1 - 5 - 4 = -8$ et $-2^2 = -4$ donc $\mathcal{P}(2)$: « $t_2 \leq -2^2$ » est vraie.
- **Hérédité.** On suppose qu'il existe un entier $n \geq 2$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie.
  Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$: « $t_{n+1} \leq -(n+1)^2$ » est vraie également.
  On a, par hypothèse de récurrence, $t_n \leq -n^2$. Donc $t_n - 5n - 4 \leq -n^2 - 5n - 4$. Or $-(n+1)^2 = -n^2 - 2n - 1$.
  Donc $-n^2 - 5n - 4 = -n^2 - 2n - 1 - 3n - 3 = -(n+1)^2 - (3n+3) \leq -(n+1)^2$ car $3n + 3 \geq 0$.
  Par transitivité de la relation $\leq$ (si $a \leq b$ et $b \leq c$ alors $a \leq c$), on en déduit que $t_n - 5n - 4 \leq -(n+1)^2$, c'est-à-dire $t_{n+1} \leq -(n+1)^2$. Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
- **Conclusion.** Par axiome de récurrence, on a montré que pour tout entier $n \geq 2$ on a $t_n \leq -n^2$.

2. $\lim\limits_{n\to+\infty} -n^2 = -\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = -\infty$ par théorème de comparaison.

Exercice 15

1. $(-1)^n = 1$ si n est pair et $(-1)^n = -1$ si n est impair. Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq (-1)^n \leq 1$;
d'où $4 \leq 5 + (-1)^n \leq 6$ puis $4 \times 0{,}59^n \leq 0{,}59^n(5 + (-1)^n) \leq 6 \times 0{,}59^n$, c'est-à-dire $4 \times 0{,}59^n \leq u_n \leq 6 \times 0{,}59^n$.

2. $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}59^n = 0$ car $-1 < 0{,}59 < 1$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} 4 \times 0{,}59^n = \lim\limits_{n\to+\infty} 6 \times 0{,}59^n = 0$ par produit. Par conséquent, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ d'après le théorème des gendarmes.

Exercice 16

1. Il semble que la suite (k_n) ait pour limite 0 quand n tend vers $+\infty$.

2. D'après les variations de la fonction sinus, on sait que $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. A fortiori, $-1 \leq \sin(n) \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi $n^2 - 1 \leq n^2 + \sin(n) \leq n^2 + 1$, puis $\frac{n^2 - 1}{n^3 - 2n + 5} \leq \frac{n^2 + \sin(n)}{n^3 - 2n + 5} \leq \frac{n^2 + 1}{n^3 - 2n + 5}$ car $n^3 - 2n + 5 > 0$. C'est-à-dire $\frac{n^2 - 1}{n^3 - 2n + 5} \leq k_n \leq \frac{n^2 + 1}{n^3 - 2n + 5}$.

3. On est en présence d'une forme indéterminée « $\frac{\infty}{\infty}$ ». On factorise numérateur et dénominateur par le terme de plus haut degré : $\frac{n^2 - 1}{n^3 - 2n + 5} = \frac{n^2}{n^3} \times \frac{1 - \frac{1}{n^2}}{1 - \frac{2}{n^2} + \frac{5}{n^3}} = \frac{1}{n} \times \frac{1 - \frac{1}{n^2}}{1 - \frac{2}{n^2} + \frac{5}{n^3}}$. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$; $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \frac{1}{n^2} = 1$ par somme et $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \frac{2}{n^2} + \frac{5}{n^3} = 1$ par somme donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2 - 1}{n^3 - 2n + 5} = 0$ par quotient et produit. De même, on obtient que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2 + 1}{n^3 - 2n + 5} = 0$. On en déduit, grâce au théorème des gendarmes, que $\lim\limits_{n\to+\infty} k_n = 0$, ce qui valide la conjecture précédente.

Exercice 17

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit k un entier compris entre 1 et n $(1 \leq k \leq n)$. On a $n^2+1 \leq n^2+k \leq n^2+n$; d'où $\dfrac{1}{n^2+1} \geq \dfrac{1}{n^2+k} \geq \dfrac{1}{n^2+n}$ car la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$; puis $\dfrac{n}{n^2+n} \leq \dfrac{n}{n^2+k} \leq \dfrac{n}{n^2+1}$ car $n > 0$. On obtient ainsi n égalités, une pour chaque valeur de k, que l'on peut sommer pour k allant de 1 à n :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+n} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+1}$$

Puisque les termes des sommes des membres de gauche et de droite ne dépendent pas de n, et puisque la somme du membre central est égale à u_n, on obtient :

$$n \times \frac{n}{n^2+n} \leq u_n \leq n \times \frac{n}{n^2+1}$$

Par conséquent :

$$\frac{n^2}{n^2+n} \leq u_n \leq \frac{n^2}{n^2+1}$$

2. On reconnaît la configuration classique du théorème des gendarmes. Calculons alors les limites des membres extérieurs de l'inégalité. On reconnaît des formes indéterminées « $\dfrac{\infty}{\infty}$ ». On factorise numérateur et dénominateur par le terme de plus haut degré : $\dfrac{n^2}{n^2+n} = \dfrac{n^2}{n^2} \times \dfrac{1}{1+\frac{1}{n}} = \dfrac{1}{1+\frac{1}{n}}$. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2}{n^2+n} = 1$ par opérations sur les limites. De même, $\dfrac{n^2}{n^2+1} = \dfrac{1}{1+\frac{1}{n^2}}$ et on déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2}{n^2+1} = 1$. On conclut que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ grâce au théorème des gendarmes.

Exercice 18

Partie A

1. Augmenter une quantité de 5 % revient à la multiplier par 1,05. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 1{,}05 v_n$ donc la suite (v_n) est géométrique de raison 1,05. Son premier terme étant $v_0 = 12$, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 12 \times 1{,}05^n$.

2. Non car $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ car $1{,}05 > 1$ et donc $v_n > 60$ à partir d'un certain rang, que l'on peut d'ailleurs déterminer avec un tableau de valeurs ou un algorithme de recherche de seuil (on trouve $v_n > 60 \iff n \geq 33$).

Partie B

1. **a.** On a $g'(x) = \dfrac{-2{,}2}{605}x + 1{,}1$.
$g'(x) > 0 \iff x < 302{,}5$. Ainsi $g'(x) > 0$ pour tout $x \in [0\,;\,60]$ et donc g est croissante sur $[0\,;\,60]$.

b. $g(x) = x \iff \dfrac{-1{,}1}{605}x^2 + 1{,}1x = x \iff \dfrac{-1{,}1}{605}x^2 + 0{,}1x = 0 \iff \left(\dfrac{-1{,}1}{605}x + 0{,}1\right)x = 0 \iff x \in \{0\,;\,55\}$

2. **a.** $u_1 \approx 12{,}938$. La population de l'espèce animale dans la réserve s'élève à 12 938 individus en 2021.

b. — $\mathcal{P}(n)$: « $0 \leq u_n \leq 55$ ».
— **Initialisation.** $u_0 = 12$ donc $\mathcal{P}(0)$: « $0 \leq u_0 \leq 55$ » est vraie.
— **Hérédité.** On suppose qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie.
Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$: « $0 \leq u_{n+1} \leq 55$ » est vraie également.
On a, par hypothèse de récurrence, $0 \leq u_n \leq 55$. Donc $g(0) \leq g(u_n) \leq g(55)$ par croissance de g sur $[0\,;\,60]$, c'est-à-dire $0 \leq u_{n+1} \leq 55$. Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
— **Conclusion.** Par axiome de récurrence, on a montré que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 55$.

c. Cela peut se montrer par récurrence en adaptant la démonstration précédente. On peut aussi le prouver de la façon suivante : $g(x) - x$ est un polynôme du second degré qui a pour racines 0 et 55 (d'après **B.1.b.**) et dont le coefficient dominant est négatif. Ainsi, pour tout $x \in [0\,;\,55]$, $g(x) - x \geq 0$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0\,;\,55]$ (d'après **B.2.b.**) donc $g(u_n) - u_n \geq 0$, d'où $u_{n+1} - u_n \geq 0$. Par conséquent, (u_n) est croissante.

d. (u_n) est croissante et majorée par 55 donc (u_n) est convergente d'après le théorème de la limite monotone.

e. L'équation $g(\ell) = \ell$ admet deux solutions : 0 et 55 (d'après **B.1.b.**). La limite de (u_n) ne saurait être égale à 0 car (u_n) est minorée par 12 (toute suite croissante est minorée par son premier terme) donc les termes ne peuvent s'approcher infiniment de cette valeur. On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 55$. Ainsi la population de l'espèce animale dans la réserve va se stabiliser autour de 55 000 individus au cours du temps.

3.

```
def seuil():
    u=12
    n=0
    while u<50:
        u=-1.1*u**2/605+1.1*u
        n=n+1
    return n
```

```
In [2]: seuil()
Out[2]: 36
```

Exercice 19

Partie A

1. f est de la forme $\sqrt{u}$ avec, pour tout x réel positif : $u(x) = x + 1$ et $u'(x) = 1$.

Donc $f' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ donc pour tout $x \in [0\ ;\ +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$.

La fonction racine carrée étant à valeurs positives, pour tout $x \in [0\ ;\ +\infty[$, $f'(x) \geqslant 0$ donc la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

2. Soit x un réel appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$:

$$f(x) - x = \sqrt{x+1} - x = \frac{\left(\sqrt{x+1} - x\right) \times \left(\sqrt{x+1} + x\right)}{\sqrt{x+1} + x} = \frac{\left(\sqrt{x+1}\right)^2 - x^2}{\sqrt{x+1} + x} = \frac{-x^2 + x + 1}{\sqrt{x+1} + x}.$$

3. $f(x) = x \iff \dfrac{-x^2 + x + 1}{\sqrt{x+1} + x} = 0 \iff -x^2 + x + 1 = 0$

Car sur $[0\ ;\ +\infty[$, le dénominateur $\sqrt{x+1} + x$ est strictement positif, en tant que somme d'une expression strictement positive $(\sqrt{x+1})$ et d'une autre positive (x), donc ce dénominateur est non nul.

On a un polynome du second degré. Calculons le discriminant.

$\Delta = 1^2 - 4 \times (-1) \times 1 = 5$

On a donc deux racines réelles distinctes :

$x_1 = \dfrac{-1 - \sqrt{5}}{-2} = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2} \geqslant 0$

$x_2 = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{-2} < 0$ donc n'est pas solution de l'équation sur $[0\ ;\ +\infty[$

L'équation $f(x) = x$ admet donc une unique solution sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$:

$\ell = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Remarque : ce nombre est connu sous l'appellation « nombre d'or ».

Partie B

1. — **Initialisation :** pour $n = 0$, on a $u_0 = 5$.

$u_0 \in [0\ ;\ +\infty[$, donc $f(u_0)$ est défini et $u_1 = f(u_0) = f(5) = \sqrt{5+1} = \sqrt{6} \approx 2{,}45$.

L'inéquation $1 \leqslant u_{0+1} \leqslant u_0$ est bien vérifiée.

— **Hérédité :** Pour un entier naturel n, on suppose que l'inégalité est vraie au rang n, c'est-à-dire : $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.

En appliquant la fonction f aux trois membres de cette inégalité, la croissance de f sur $[0\ ;\ +\infty[$ donne :

$f(1) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n) \implies \sqrt{2} \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \implies 1 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$, *car* $\sqrt{2} \approx 1{,}4 \geqslant 1$

Cette conclusion est l'inégalité, au rang suivant.

— **Conclusion :** l'inégalité est vraie au rang 0, et sa véracité est héréditaire, pour tout entier naturel, donc, en vertu du principe de récurrence, pour tout entier naturel n, l'inégalité est vraie, soit : $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.

2. La question précédente donne :

— $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leqslant u_n$ la suite est donc décroissante ;

— $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant u_n$ la suite est donc minorée, par 1 ;

La suite (u_n) étant décroissante et minorée, elle est donc convergente, vers une limite qui doit être supérieure ou égale à 1 (et inférieure ou égale à u_0 car la suite est décroissante).

3. D'après la question **3.** de la **Partie A**, cette équation n'a qu'une solution dans $[0\ ;\ +\infty[$: $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.
On constate également que cette valeur satisfait les critères supplémentaires que l'on connaît pour cette limite (supérieure à 1 et inférieure à u_0).
La suite (u_n) converge donc vers $\ell = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

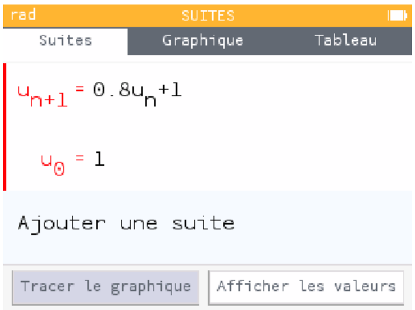
4. La fonction `seuil` présentée initialise la variable `u` à 5, c'est-à-dire u_0 et la variable `i` à 0, c'est-à-dire l'indice de u_0.
Tant que la valeur absolue de la différence entre ℓ et u est supérieure ou égale à 10^{-n}, on remplace dans la variable `u` le terme de la suite par le terme suivant, et dans la variable `i` l'indice par l'indice suivant.
La boucle s'arrête donc dès que `u` contient un terme de la suite dont la distance à ℓ est strictement inférieure à 10^{-n} et renvoie l'indice de ce terme (qui est donc une valeur approchée à 10^{-n} près de la limite).

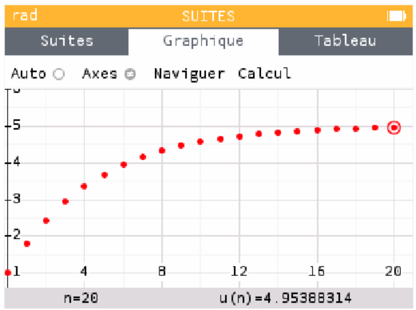
a. `seuil(2)` va donc renvoyer l'indice du premier terme qui est à moins d'un centième de la limite ℓ.
Par exploration à la calculatrice, on a $u_4 - \ell \approx 0{,}02 \geqslant 10^{-2}$ et
$u_5 - \ell \approx 0{,}007 < 10^{-2}$ donc la fonction renverra l'indice du premier terme pour lequel le test du `while` n'est pas satisfait : 5.

b. Si `seuil(4)` renvoie 9, c'est que le premier terme de la suite qui est une valeur approchée de ℓ à 10^{-4} près sera u_9.
Remarque : comme la suite (u_n) converge vers ℓ en décroissant, tous les termes de la suite sont des valeurs approchées de ℓ par excès, l'utilisation de la fonction `abs` dans la fonction Python n'était pas indispensable.

Exercice 20

Partie A





1. La suite (u_n) semble croissante et converger vers 5.

2. — $\mathcal{P}(n)$: « $u_n = 5 - 4 \times 0{,}8^n$ ».
— **Initialisation.** $u_0 = 1$ et $5 - 4 \times 0{,}8^0 = 5 - 4 = 1$ donc $\mathcal{P}(0)$: « $u_0 = 5 - 4 \times 0{,}8^0$ » est vraie.
— **Hérédité.** On suppose qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie.
Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$: « $u_{n+1} = 5 - 4 \times 0{,}8^{n+1}$ » est vraie également.
On a, par hypothèse de récurrence, $u_n = 5 - 4 \times 0{,}8^n$. Donc $0{,}8u_n = 0{,}8(5 - 4 \times 0{,}8^n)$; ainsi $0{,}8u_n = 4 - 4 \times 0{,}8^{n+1}$; puis $0{,}8u_n + 1 = 5 - 4 \times 0{,}8^{n+1}$ c'est-à-dire $u_{n+1} = 5 - 4 \times 0{,}8^{n+1}$. Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
— **Conclusion.** Par axiome de récurrence, on a montré que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 5 - 4 \times 0{,}8^n$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. $0{,}8^{n+1} < 0{,}8^n$ donc $-4 \times 0{,}8^{n+1} > -4 \times 0{,}8^n$ d'où $5 - 4 \times 0{,}8^{n+1} > 5 - 4 \times 0{,}8^n$ c'est-à-dire $u_{n+1} > u_n$.
Ainsi la suite (u_n) est strictement croissante.
De plus, $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}8^n = 0$ car $-1 < 0{,}8 < 1$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 5$ par produit et somme.

Partie B

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. $v_{n+1} = u_{n+1} - 5c = (0{,}8u_n + c) - 5c = 0{,}8u_n - 4c = 0{,}8(u_n - 5) = 0{,}8v_n$.
Ainsi (v_n) est géométrique de raison 0,8 et de premier terme $v_0 = u_0 - 5c = 1 - 5c$.

2. Par conséquent, $v_n = (1-5c)0{,}8^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Et donc $u_n = v_n + 5c = (1-5c)0{,}8^n + 5c$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. On cherche à déterminer la valeur de c telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 10$. Or $\lim\limits_{n \to +\infty} (1-5c)0{,}8^n + 5c = 5c$ par opérations sur les limites. Par unicité de la limite d'une suite, on en déduit que $c = 2$.