44 **Représenter, raisonner**

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{4}$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{u_n + 2}$.

1. Déterminer la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ telle que $u_{n+1} = f(u_n)$.
2. Démontrer que la fonction f est croissante sur $[0\,;+\infty[$.
3. Dans un repère, représenter la fonction f et la droite d'équation $y = x$. On prendra 2 cm pour unité sur chaque axe.
En utilisant le graphique :
a. placer les termes u_0, u_1 et u_2 sur l'axe des abscisses ;
b. conjecturer le sens de variation de la suite (u_n);
c. conjecturer un majorant de la suite (u_n) ;
4. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n :
$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2.$$
b. Les conjectures précédentes sont-elles vérifiées ?

45 On considère la suite (u_n) définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 8 \\ u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + 3 \text{ pour tout entier naturel } n. \end{cases}$$

1. a. Calculer u_1, u_2 et u_3.
b. Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n).
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant u_{n+1} \geqslant 5$.
La conjecture est-elle vérifiée ?
3. Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 5$.
a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{5}$.
b. En déduire une expression de v_n en fonction de n.
4. Déterminer une expression de u_n en fonction de n.
5. Calculer u_{100}.

46 CALCULATRICE

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = x^3 + x - 3.$$

1. Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = f(n)$.
a. À l'aide du tableur de la calculatrice, calculer les dix premiers termes de la suite (u_n).
b. La suite (u_n) semble-t-elle strictement croissante ? strictement décroissante ? Justifier la conjecture.
c. La suite (u_n) semble-t-elle minorée ? majorée ? Si oui, donner un minorant (respectivement un majorant) le plus grand (respectivement le plus petit) possible. Justifier ensuite cette conjecture.
2. Soit la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$v_0 = 1 \text{ et } v_{n+1} = f(v_n).$$
a. À l'aide du tableur de la calculatrice, calculer les quatre premiers termes de la suite (v_n).
b. Établir les mêmes types de conjectures qu'à la question 1.
c. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $v_n \leqslant 1$.
d. Étudier la monotonie de la suite (v_n).

47 **Calculer**

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \mathrm{e} \times \sqrt{u_n}$.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $1 \leqslant u_n \leqslant \mathrm{e}^2$.
2. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
3. Dans cette question, on s'interroge sur le comportement de la suite (u_n) si l'on choisit d'autres valeurs que 1 pour u_0. Pour chacune des affirmations ci-dessous, indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant.
a. Si $u_0 = 2\,020$, alors la suite (u_n) est croissante.
b. Si $u_0 = 2$, alors pour tout entier naturel n :
$$1 \leqslant u_n \leqslant \mathrm{e}^2.$$
c. La suite (u_n) est constante si et seulement si $u_0 = 0$.

48 Soit (u_n) la suite définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n} \text{ pour tout entier naturel } n. \end{cases}$$

• Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n > 0$ et $u_n = \frac{2}{2n+1}$.

49 On considère la suite (v_n) définie par $v_1 = \frac{1}{3}$ et, pour tout entier $n \geqslant 1$, $v_{n+1} = \frac{n+1}{3n}v_n$.

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$:
$$v_n = \frac{n}{3^n}.$$
2. Étudier la monotonie de la suite (v_n).
3. CALCULATRICE À l'aide de la calculatrice, conjecturer un encadrement de v_n, pour tout entier $n \geqslant 1$, par deux constantes, puis démontrer cette conjecture par récurrence.

50 On considère la suite (u_n) de premier terme $u_0 = 1$ et telle que $u_{n+1} = 5u_n + 8$ pour tout entier naturel n.
Les questions 1 et 2 sont indépendantes et proposent deux méthodes différentes pour déterminer une formule explicite pour la suite (u_n).

1. Montrer par récurrence que $u_n = 3 \times 5^n - 2$ pour tout entier naturel n.
2. On considère la suite (v_n) définie par $v_n = u_n + 2$ pour tout entier naturel n.
a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 5.
b. En déduire l'expression de v_n en fonction de n, puis celle de u_n en fonction de n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

51 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{u_n^{\,2} + 1}}$.

1. Calculer la valeur exacte de u_1, u_2, u_3 et u_4.
2. Quelle conjecture peut-on faire quant à la formule explicite de u_n ?
3. Démontrer la conjecture.