I Composition de fonctions

Définition 1

Soit f, g deux fonctions.
On appelle **composée** de f et g la fonction

$$x \mapsto f(g(x)).$$

On la note $f \circ g$.
Elle est définie en toute valeur de x telle que g soit définie en x et f soit définie en $g(x)$.

Attention, a priori $f \circ g \neq g \circ f$. Par exemple, en prenant

$$\begin{aligned} f : \mathbf{R} &\longrightarrow \mathbf{R}_+ \\ x &\longmapsto x^2, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} g : \mathbf{R}_+ &\longrightarrow \mathbf{R}_+ \\ x &\longmapsto \sqrt{x}, \end{aligned}$$

alors $f \circ g$ n'est définie que sur $\mathbf{R}_+$ et on a alors :

$$\forall x \geq 0,\ f \circ g(x) = (\sqrt{x})^2 = x.$$

Mais $g \circ f$ est définie sur tout $\mathbf{R}$ et alors

$$\forall x \in \mathbf{R},\ g \circ f(x) = \sqrt{x^2} = |x|.$$

I.1 Dérivation de composée

Théorème 1

Soit f, g deux fonctions.
Si

- g est dérivable en un point x_0,
- f est dérivable en $g(x_0)$,

alors $f \circ g$ est dérivable en x_0 et on a

$$(f \circ g)'(x_0) = g'(x_0) \times (f' \circ g)(x_0).$$

Exemple

Détaillons un exemple. Soit h la fonction $x \mapsto \sqrt{3x-5}$. Ici, avec les notations du théorème, on a $f : x \mapsto \sqrt{x}$ et $g : x \mapsto 3x - 5$.

Domaine de définition Comme la racine n'est définie que pour les nombres positifs, h n'est définie que pour les valeurs de x telles que

$$3x - 5 \geq 0.$$

Autrement dit h est définie pour $x \geq \frac{5}{3}$.

Domaine de dérivabilité g est dérivable sur $\mathbf{R}$, ce n'est donc pas elle qui va poser problème. f n'est dérivable que sur $\mathbf{R}_+^*$. Donc h est dérivable partout où $g(x) > 0$, c'est-à-dire pour tout $x > \frac{5}{3}$.

Conclusion h est donc dérivable pour tout $x > \frac{5}{3}$ et on a alors

$$\begin{aligned}\forall x > \frac{5}{3},\ h'(x) &= g'(x) \times (f' \circ g)(x) \\ &= 3 \times \frac{1}{2\sqrt{3x-5}},\end{aligned}$$

car ici

$$\begin{aligned} g &: x \mapsto 3x - 5 \\ g' &: x \mapsto 3 \\ f &: x \mapsto \sqrt{x} \\ f' &: x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

II Convexité et concavité

Définition 2

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
Si, pour tout points A et B de la courbe de f, le segment $[AB]$ est toujours au-dessus de la courbe, f sera alors dite **convexe** sur I.
Si $[AB]$ est toujours en dessous, on dira que f est **concave**.

C'est sans doute plus simple à comprendre sur un dessin.

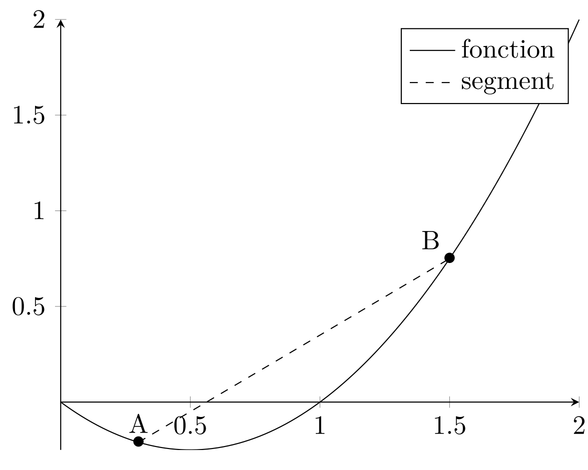

Figure 1 – Illustration de la convexité

Je suis parti de la courbe de la fonction. J'ai choisi deux points A et B d'abscisses entre 0 et 2. J'ai tracé le segment passant entre les deux points. La fonction est dite convexe sur $[0; 2]$, car la courbe de la fonction est sous $[AB]$, et on peut se convaincre que cela reste vraie si je fais bouger A ou B.

En pratique, on caractérisera plutôt la convexité par le théorème (admis) suivant :

Théorème 2

Soit f une fonction deux fois dérivable[a] sur un intervalle I.
Alors les quatre propriétés suivantes sont équivalentes :

1. f est convexe sur I,
2. f' est croissante sur I,
3. f'' est positive sur I,
4. la courbe de f est au-dessus[b] de toutes ses tangentes.

a. c'est-à-dire que f est dérivable et f' aussi. On note alors f'' la dérivée de f'.
b. tant qu'on se restreint à I

Remarques

— On peut aussi énoncer une version « concave » du théorème : remplacer croissante par décroissante, positive par négative et au-dessus par en dessous.
— C.f. l'annexe pour une démonstration de $3 \implies 4$.

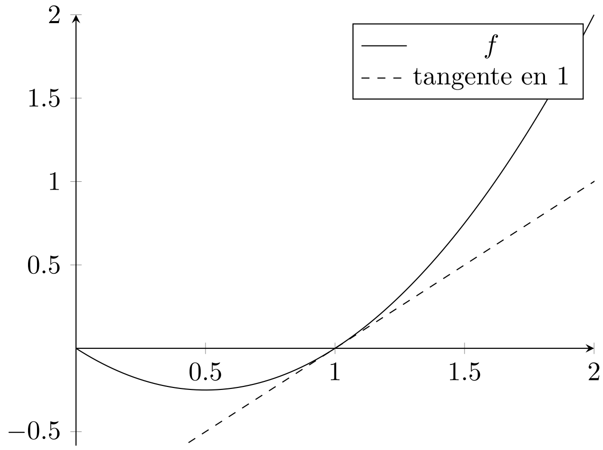

Figure 2 – Convexité et tangentes

II.1 Exemples

II.1.1 Polynômes

Soit $f : ax^2 + bx + c$ une fonction polynôme du second degré. f est deux fois dérivable sur $\mathbf{R}$: pour tout $x \in \mathbf{R}$

$$f'(x) = 2ax + b$$
$$f''(x) = 2a.$$

Alors

— Si $a > 0$, f est convexe sur $\mathbf{R}$,
— si $a < 0$, f est concave sur $\mathbf{R}$.

Les réciproques sont vraies.

II.1.2 Exponentielle

exp est dérivable autant de fois qu'on veut sur $\mathbf{R}$ puisque $\exp' = \exp$. Comme de plus

$$\forall x \in \mathbf{R},\ \exp(x) > 0,$$

on peut affirmer que la fonction exponentielle est convexe sur $\mathbf{R}$. Elle est donc en particulier toujours au-dessus de sa tangente en 0. Comme

$$\exp'(0) = \exp(0) = 1,$$

l'équation de cette dernière est

$$y = x + 1.$$

Et donc on peut conclure :

Théorème 3

$$\forall x \in \mathbf{R},\ e^x \geq x + 1.$$

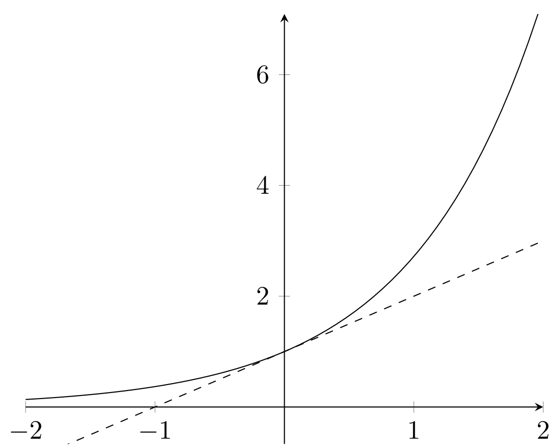

FIGURE 3 – Convexité de la fonction exp

III Points d'inflexion

Définition 3

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.
Soit $a \in I$. On dit que a est un **point d'inflexion** quand f' change de sens de variation en a. Ou encore quand f'' change de signe en a.

Généralement, un point d'inflexion sépare deux intervalles tels que f est concave sur l'un et convexe sur l'autre.

III.1 Exemples

III.1.1 La fonction cube

0 est un point d'inflexion pour la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbf{R} &\longrightarrow \mathbf{R} \\ x &\longmapsto x^3. \end{aligned}$$

En effet, pour tout x, $f''(x) = 6x$. Cette fonction est linéaire, donc change de signe 0.

III.1.2

On considère la fonction

$$\begin{aligned} g : \mathbf{R} &\longrightarrow \mathbf{R} \\ x &\longmapsto g(x) = (1-2x)e^x. \end{aligned}$$

A-t-elle des points d'inflexions ?

Elle est dérivable deux fois et on a

$$\forall x \in \mathbf{R},\ f'(x) = (-2)e^x + (1-2x)e^x = e^x(-2x-1).$$

Et donc

$$\forall x \in \mathbf{R},\ f''(x) = e^x(-2x-1) + e^x(-2) = e^x(-2x-3).$$

Comme $\forall x \in \mathbf{R},\ e^x > 0$, f'' est du signe de $-2x-3$. C'est-à-dire positive avant $-\frac{3}{2}$, négative après. Donc f'' change de signe en $-\frac{3}{2}$, qui est ainsi l'unique point d'inflexion.

IV Convexité et extrema

Pourquoi s'embêter avec cette nouvelle propriété pour les fonctions ?

Théorème 4

Soit I un intervalle ouvert et $f : I \to \mathbf{R}$.
On suppose que f est convexe et dérivable sur I.
Alors f admet un minimum global en un point $a \in I$ si et seulement si $f'(a) = 0$.

Autrement dit sous ces hypothèses, il suffit de résoudre $f'(x) = 0$ pour trouver les minimums de f.

IV.1 Exemples

La fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbf{R} &\longrightarrow \mathbf{R}_+ \\ x &\longmapsto x^2 \end{aligned}$$

est convexe (sa dérivée seconde vaut partout 2 qui est positif). Comme pour tout x on a

$$f'(x) = 0 \iff 2x = 0 \iff x = 0,$$

le théorème précédent nous dit que f a un minimum global en 0. Autrement dit que la fonction carré est toujours positive. Rassurant...

La fonction

$$\begin{aligned} g : \mathbf{R} &\longrightarrow \mathbf{R} \\ x &\longmapsto x^3 \end{aligned}$$

n'est pas convexe. Donc bien que $f'(0) = 0$, le théorème précédent ne s'applique pas et on ne peut pas avancer qu'elle a un minimum global en 0. Ce qui est rassurant puisqu'elle n'a pas de minimum global sur $\mathbf{R}$.

V Annexe

Démonstration (du théorème 2)

L'hypothèse est $f'' \geq 0$ sur I. Montrons que f est toujours au-dessus de ses tangentes.

Soit $a \in I$. Sa tangente en a est représentée par la fonction affine

$$\begin{aligned} T_a : \mathbf{R} &\longrightarrow \mathbf{R} \\ x &\longmapsto f'(a)(x-a) + f(a). \end{aligned}$$

Pour montrer que la courbe de f est toujours au-dessus de T_a, il suffit de montrer que $f - T_a$ est toujours positive.

Pour montrer cela on va étudier les variations de $f - T_a$. Sa dérivée vérifie

$$\forall x \in I,\ (f - T_a)'(x) = f'(x) - f'(a).$$

Il est difficile de trouver le signe de cette dérivée a priori. On peut quand même dire qu'elle vaut 0 en a. On va donc lui appliquer la même méthode :

$$\forall x \in I,\ (f - T_a)''(x) = f''(x) - 0 = f''(x) \geq 0.$$

Donc $(f - T_a)'$ est croissante. On peut tracer son tableau de variation :

x	a
$(f - T_a)'$	$\nearrow$ 0 $\nearrow$

Autrement dit, $(f - T_a)'$ est positive après a, négative avant. Ce qui donne les variations de $f - T_a$:

x		a	
$(f - T_a)'$	$-$	0	$+$
$f - T_a$	$\searrow$		$\nearrow$

Le minimum de $f - T_a$ est donc atteint en a. Et

$$f(a) - T_a(a) = f(a) - f'(a)(a-a) - f(a) = 0.$$

Autrement dit

$$\forall x \in I,\ f(x) - T_a(x) \geq 0.$$

Ce qui est la conclusion cherchée.