Fiche n°1 d'exercices sur le chapitre 1 - CORRECTION

<u>Exercice n°1</u> : ex 1 p. 11 du manuel *(calcul de termes)*

1. $u_0 = 5 + \sqrt{0}$
$= 5$

$u_1 = 5 + \sqrt{1}$
$= 6$

$v_1 = 5 + \sqrt{v_0}$
$= 5 + \sqrt{16}$
$= 9$

$v_2 = 5 + \sqrt{v_1}$
$= 5 + \sqrt{9}$
$= 8$

2. Non corrigé

3.

$v = 16$
Pour i allant de 1 à n :
  $u = 5 + \sqrt{v}$
Afficher v

<u>Exercice n°2</u> : ex 2 p. 11 du manuel *(suites arithmétiques et suites géométriques)*

1. **a.** $u_{n+1} = u_n - 5$ (formule de récurrence)

$u_n = u_0 + nr$ (formule explicite)
$= 48 - 5n$

b. $u_5 = 48 - 5 \times 5 = 23$

c. $r = -5 < 0$ donc la suite (u_n) est décroissante.

2. **a.** $v_{n+1} = v_n \times 3$ (formule de récurrence)

$v_n = v_1 \times q^{n-1}$ (formule explicit, le premier terme est v_1)
$= -2 \times 3^{n-1}$

b. $v_5 = -2 \times 3^4 = -162$

c. $v_{n+1} - v_n = -2 \times 3^n - (2 \times 3^{n-1})$
$v_{n+1} - v_n = -2 \times 3^{n-1} \times (3 - 1)$ car $3^n = 3 \times 3^{n-1}$
$= -2 \times 3^{n-1} \times 2$
Donc $v_{n+1} - v_n < 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite (v_n) est donc décroissante.

<u>Exercice n°3</u> : ex 3 p. 11 du manuel *(suites arithmético-géométriques) (1)*

1. $u_1 = -2 \times u_0 + 3$
$= -2 \times 6 + 3$
$= -9$

$u_2 = -2 \times u_1 + 3$
$= -2 \times (-9) + 3$
$= 21$

$u_3 = -2 \times u_2 + 3$
$= -2 \times 21 + 3$
$= -39$

$u_2 - u_1 \neq u_3 - u_2$ donc (u_n) n'est pas arithmétique.

$\frac{u_2}{u_1} \neq \frac{u_3}{u_2}$ donc (u_n) n'est pas géométrique.

<u>Exercice n°4</u> : *(suites arithmético-géométriques) (2)*

1. $u_1 = 0{,}8u_0 + 50$
$= 0{,}8 \times 30 + 50$
$= 74.$

$u_2 = 0{,}8u_1 + 5$
$= 0{,}8 \times 74 + 50$
$= 109{,}2.$

$u_3 = 0{,}8u_2 + 50$
$= 0{,}8 \times 109{,}2 + 50$
$= 137{,}36.$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 250 \\ &= 0{,}8u_n + 50 - 250 \\ &= 0{,}8u_n - 200 \\ &= 0{,}8\left(u_n - \frac{200}{0{,}8}\right) \end{aligned}$$

$$= 0{,}8(u_n - 250)$$
$$= 0{,}8v_n$$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 0{,}8v_n$.
La suite (v_n) est donc géométrique de raison 0,8 ; son premier terme est : $v_0 = u_0 - 250$

$$= 30 - 250$$
$$= -220$$

3. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times q^n$

$$= -220 \times 0{,}8^n.$$

Donc $u_n = v_n + 250$

$$= -220 \times 0{,}8^n + 250.$$

Exercice n°5 : ex 23 p. 28 du manuel *(sens de variations)*

1. Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 + n + 1 - 1 - (n^2 + n - 1)$$
$$= n^2 + 2n + 1 + n - n^2 - n + 1$$
$$= 2n + 2$$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2n + 2 > 0$. Donc la suite (u_n) est croissante.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n > 0$ car $3 > 0$ et $5 > 0$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{5\times 3^{n+1}}{5\times 3^n}$$
$$= \frac{5\times 3^n \times 3}{5\times 3^n}$$
$$= 3.$$

Donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc (u_n) est croissante.

3. Calculons $f'(x)$. $f'(x) = \frac{2\times x^2 - 2x(2x-1)}{(x^2)^2}$

$$= \frac{2x^2 - 4x^2 + 2x}{x^4}$$
$$= \frac{-2x^2 + 2x}{x^4}$$
$$= \frac{x(-2x+2)}{x^4}$$
$$= \frac{-2x+2}{x^3}$$

Or le numérateur de cette fraction est une fonction affine qui s'annule en 1. Sa pente est négative, elle est donc strictement négative pour $x > 1$.
De plus $x^3 > 0$ donc $f'(x) = \frac{-2x^2+1}{x^4} \leq 0$ pour tout $x \in [1\,; +\infty[$. L'égalité n'a lieu qu'en 1.
La fonction f est donc strictement décroissante sur $[1\,; +\infty[$.

La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par $u_n = f(n)$.
Donc (u_n) est décroissante.

Exercice n°6 : *(suite bornée)*

1. $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{2^n} > 0$, donc 0 est un minorant de u_n.
De plus, $\forall n \in \mathbb{N}$, $2^n \geq 1$ donc $\frac{1}{2^n} \leq 1$. 1 est un majorant de u_n.

2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq (-1)^n \leq 1$

$$-1 + 2 \leq 2 + (-1)^n \leq 1 + 2$$
$$1 \leq 2 + (-1)^n \leq 3$$

La suite (u_n) est donc minorée par 1 et majorée par 3.

3. $\forall n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq \sin(n) \leq 1$

$$-4 \leq 4\sin(n) \leq 4$$
$$-7 \leq 4\sin(n) - 3 \leq 1$$

La suite (u_n) est donc minorée par -7 et majorée par 1.

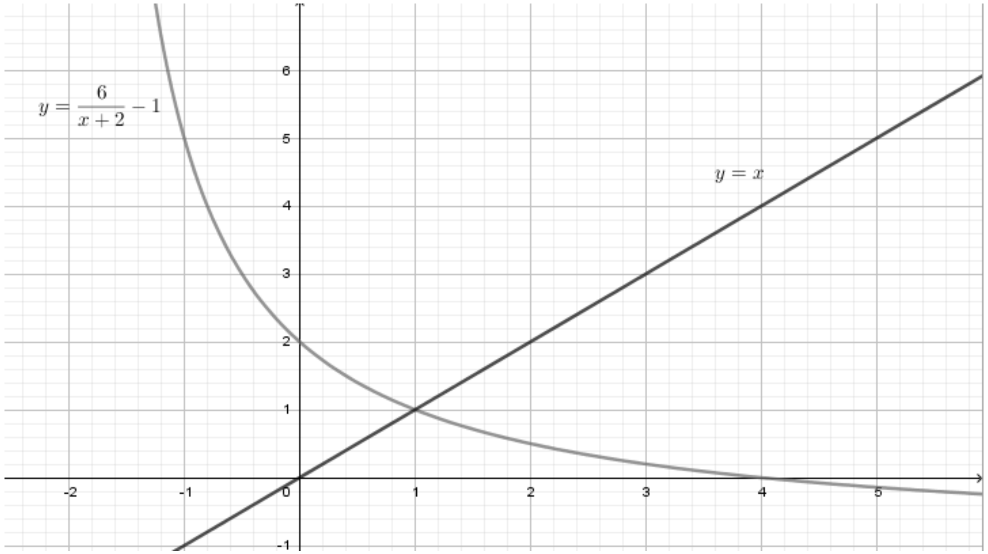
Exercice n°7 : *(suite bornée)*

1. **a.** non corrigé
b. -1 ne peut pas être un minorant de (u_n) car $u_2 = -4 < -1$.
c. 20 ne peut pas être un majorant de (u_n) car $u_9 = 31 > 20$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n + 5 = n^2 - 6n + 4 + 5$
$$= n^2 - 6n + 9$$
$$= (n-3)^2\,.$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n-3)^2 \geq 0$ donc $u_n + 5 \geq 0$ donc $u_n \geq -5$
La suite (u_n) est donc minorée par -5.

<u>Exercice n°8</u> : *(construction des termes d'une suite)*



<u>Exercice n°9</u> : ex 5 p. 26 du manuel

1. cf dernière page

2. **a.** Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}+2}{u_{n+1}-2}$$
$$= \frac{\frac{3u_n+4}{u_n+3}+2}{\frac{3u_n+4}{u_n+3}-2}$$
$$= \frac{\frac{3u_n+4}{u_n+3}+\frac{2u_n+6}{u_n+3}}{\frac{3u_n+4}{u_n+3}-\frac{2u_n+6}{u_n+3}}$$
$$= \frac{\frac{5u_n+10}{u_n+3}}{\frac{u_n-2}{u_n+3}}$$
$$v_{n+1} = \frac{5u_n+10}{u_n-2}$$
$$= \frac{5(u_n+2)}{u_n-2}$$
$$= 5 \times \frac{u_n+2}{u_n-2}$$
$$= 5v_n$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison 5. Son premier terme est :
$$v_0 = \frac{u_0+2}{u_0-2}$$
$$= \frac{-\frac{3}{2}+2}{-\frac{3}{2}-2}$$
$$= \frac{-\frac{3}{2}+\frac{4}{2}}{-\frac{3}{2}-\frac{4}{2}}$$
$$= \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{7}{2}}$$
$$= -\frac{1}{7}$$

b. On a donc : pour tout n, $v_n = -\frac{1}{7} \times 5^n$.

Afin d'exprimer v_n en fonction de n, on exprime u_n en fonction de v_n :

On sait que $v_n = \frac{u_n+2}{u_n-2}$ donc $v_n(u_n - 2) = u_n + 2$

$$v_n \times u_n - 2v_n = u_n + 2$$
$$v_n \times u_n - u_n = 2 + 2v_n$$
$$u_n(v_n - 1) = 2 + 2v_n$$
$$u_n = \frac{2+2v_n}{v_n-1}$$

Donc $u_n = \frac{2+2\times\left(-\frac{1}{7}\right)\times 5^n}{-\frac{1}{7}\times 5^n-1}$

$= \frac{\frac{14}{7}-\frac{2\times 5^n}{7}}{-\frac{5^n}{7}-\frac{7}{7}}$

$= \frac{14-2\times 5^n}{-5^n-7}$.

c. $u_3 = \frac{14-2\times 5^3}{-5^3-7}$

$= \frac{59}{33}$

$\approx 1{,}79$.