I Principe du raisonnement par récurrence

Vous connaissez de votre cours de 1[re] la formule suivante, valable pour tout entier $n \geq 1$:

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

I.1 Démonstration

1[re] étape On vérifie facilement que la formule est vraie pour $n = 1$. Pour être précis, il nous faut juste vérifier que la somme des 1 premiers entiers, qui vaut donc 1, est égale à

$$\frac{1(1+1)}{2} = \frac{2}{2}.$$

Ce qui est clair.

Deuxième étape Ensuite, on considère un entier $n \geq 1$ **quelconque** et on suppose que la formule est vraie pour ce n. Montrons qu'elle est vraie pour $n+1$.

$$\begin{aligned} 1 + \cdots + (n+1) &= 1 + \cdots + n + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \end{aligned}$$

La première égalité fait juste apparaître le n caché dans les petits points. La deuxième égalité est vraie par hypothèse : la formule est vraie pour n.

Conclusion

1. On a montré que la formule était vraie pour $n = 1$
2. puis on a montré que si la formule est vraie pour une valeur de n, alors elle est aussi vraie pour $n + 1$.

Donc comme elle est vraie $n = 1$, elle est vraie pour 2. Et donc pour 3. Et donc pour 4, etc.

On a ainsi montré **par récurrence**, que

$$\forall n \geq 1,\ 1 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Remarques

— Les deux étapes sont importantes.

— Malheureusement, une démonstration par récurrence n'est possible qu'une fois qu'on sait ce que l'on veut démontrer. Pour filer notre exemple, cette technique ne vous fournira pas la formule, il faut la découvrir tout·e seul·e.

I.2 Vocabulaire

Lorsqu'on fait une démonstration par récurrence, il y a deux étapes :

1. La première est appelée *l'initialisation*.
2. La deuxième est la vérification de *l'hérédité*[1].

II Exercices

II.1 Quelques formules

Montrer par récurrence les formules suivantes pour tout $n \geq 1$.

1. $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
2. $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$

II.2 Etude d'une suite

On s'intéresse à la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 & = 1 \\ u_{n+1} & = u_n e^{-u_n}, \text{ pour } n \geq 1 \end{cases}.$$

1. Montrer par récurrence que $\forall n \geq 0$, $u_n > 0$.
2. Montrer que la suite est décroissante.

II.3 Une inégalité

Soit $a > 0$. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $(1 + a)^n \geq 1 + na$.

II.4 Un peu d'arithmétique

Montrer par récurrence[2] que pour tout entier naturel n, $n^3 - n$ est divisible par 6.

II.5 Des dérivées successives

Dériver une, deux puis trois fois la fonction $x \mapsto xe^{-x}$. Que remarquez vous ?

1. On démontre que la vérité de la formule pour une valeur de n se « transmet ».
2. On peut le faire directement.